Módulos de matemáticas

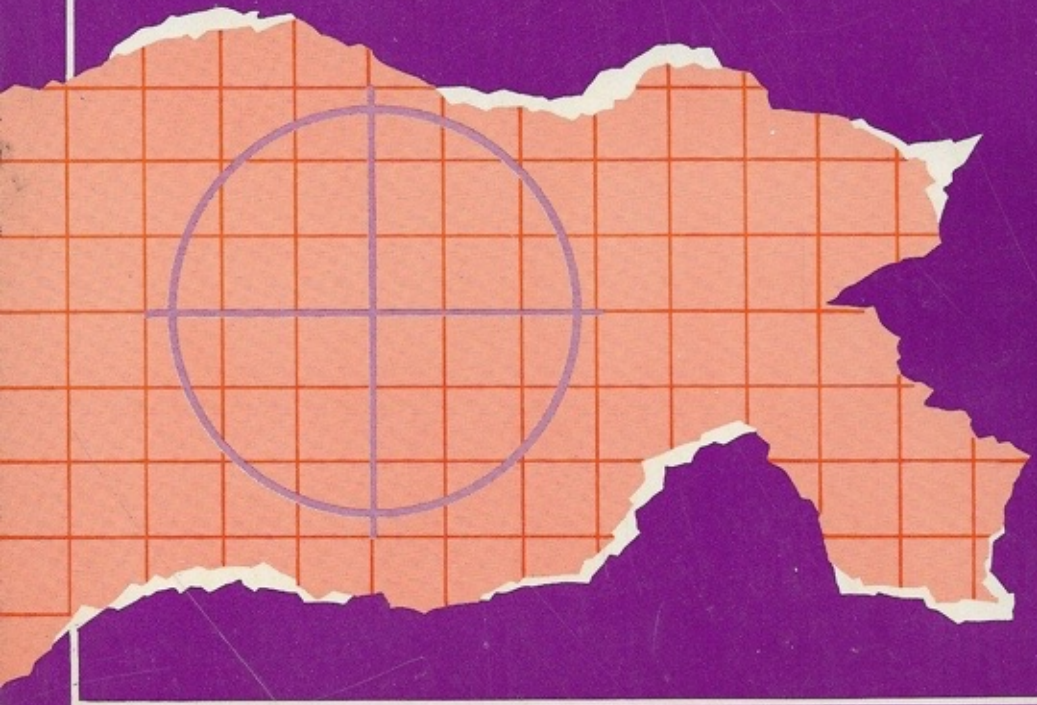
Aprendizaje paso·a paso

Bloque 6

Geometría analítica

Módulo 3
LA CIRCUNFERENCIA

Conrado Flores García



trillas

SERIE MÓDULOS DE MATEMÁTICAS

Conrado Flores García

A través del tiempo y en todos los niveles de aprendizaje, los estudiantes han considerado a las matemáticas como un escollo insalvable. Aun cuando se han establecido nuevos enfoques pedagógicos para la enseñanza de esta materia, casi siempre los educandos enfrentan su estudio con verdadero temor, debido al prejuicio generalizado sobre la supuesta dificultad de esta asignatura.

La serie *Módulos de matemáticas*, a la cual pertenece el presente texto, es un valioso auxiliar con el que puede abordarse sencilla y eficazmente el proceso de enseñanza-aprendizaje de este campo de conocimiento.

Es necesario destacar que los *Módulos de matemáticas* constituyen un método de *aprendizaje paso a paso*, ya que la información se presenta por medio de cuadros didácticos (informativos, de preguntas y de respuestas), que están organizados en orden creciente de complejidad. De este modo, se conduce *paso a paso* al lector desde los conceptos más elementales, como los de conjunto y elemento, hasta los más complejos de cálculo integral, pasando por aquéllos del álgebra (estructuras, operaciones y modelos), de la lógica matemática, de la geometría euclidiana, de la trigonometría, de la geometría analítica y del cálculo diferencial.

Mediante este novedoso sistema, más ágil y motivador que el de la enseñanza programada, se facilita tanto la exposición de los temas como la comprensión y asimilación de los mismos.

El autor revisa el panorama matemático fundamental a lo largo de los 64 módulos que, agrupados en 8 bloques, constituyen la serie. Además, cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos denominado *Memo*.

Los profesores de enseñanza secundaria, de preparatoria y de universidad pueden emplear los *Módulos de matemáticas* como parte integrante de sus guiones didácticos y los estudiantes tienen la posibilidad de incorporarse como material complementario y de apoyo a las experiencias adquiridas en el aula. Asimismo, estos libros son útiles para las personas que quieran actualizar o bien repasar, sus conocimientos en esta área o para quienes deseen iniciar un aprendizaje autodidáctico por la imposibilidad de asistir a una institución educativa.

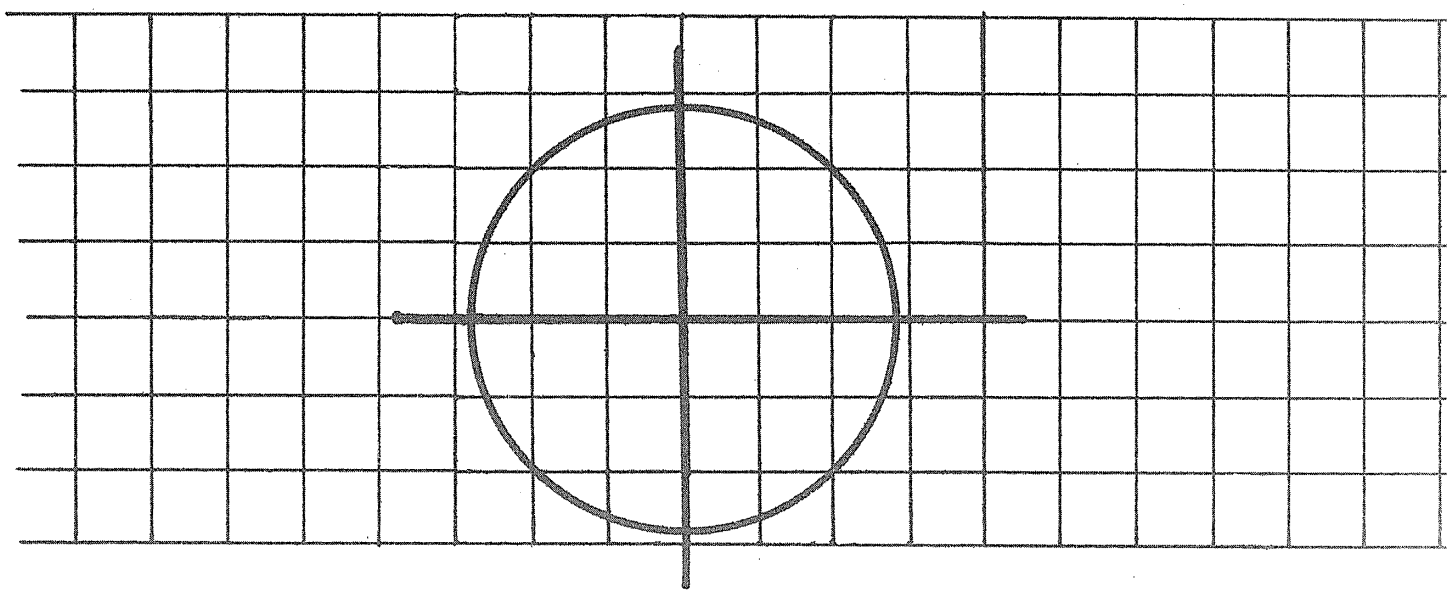
Esperamos que al estudiar los Módulos de matemáticas, los alumnos se den cuenta de que esa fortaleza defendida por ejércitos de números, símbolos y fórmulas, aparentemente inexpugnable, puede ser alcanzada por cualquier persona decidida y tesonera.

LA CIRCUNFERENCIA

Obras que integran el bloque 6 *(Geometría analítica):*

1. Introducción a la geometría analítica
2. La recta
3. La circunferencia
4. La elipse
5. La hipérbola
6. La parábola
7. Las cónicas y la ecuación general de segundo grado
8. Relaciones y lugares geométricos.

ANUIES
Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 6
Geometría analítica

Módulo 3

LA CIRCUNFERENCIA

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España, Venezuela.

La presentación y disposición en conjunto de
LA CIRCUNFERENCIA
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1984, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, julio 1984
ISBN 968-24-0834-2

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo ☞, el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

3.1 Las cónicas y la ecuación general de segundo grado con dos variables 9

3.2 La ecuación de la circunferencia, en la forma: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ 13

3.3 La ecuación de la circunferencia, en la forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ 26

3.4 Determinación del centro y el radio de una circunferencia dada por una ecuación general 38

3.5 Intersección de circunferencias 48

3.6 Circunferencia dada por tres condiciones 64

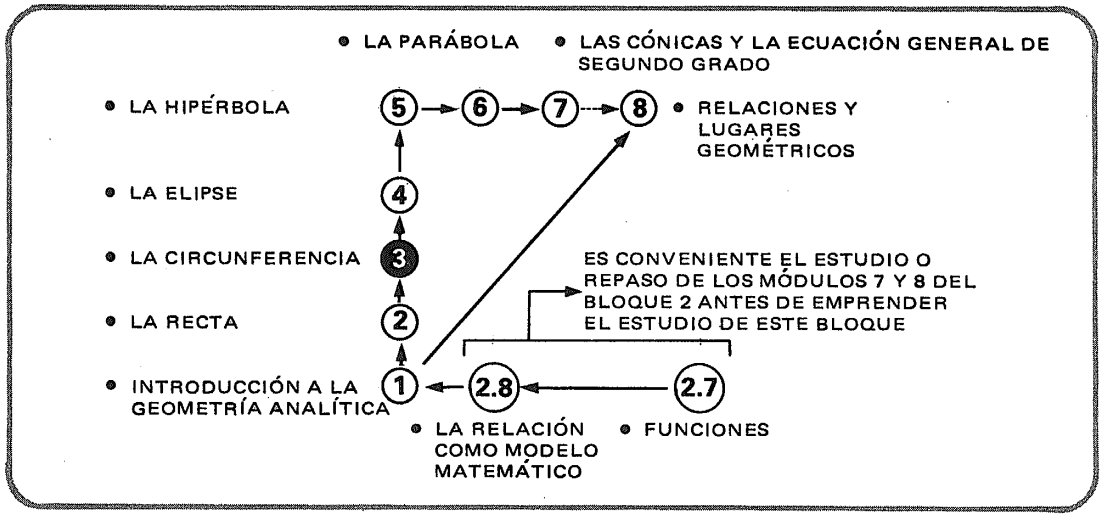
3.7 Tangentes a una circunferencia 72

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 6. Geometría analítica

Objetivos: caracterizar en el plano cartesiano el lugar geométrico representado por una relación cuya regla de correspondencia es una ecuación lineal, una ecuación cuadrática, o bien, una ecuación, una desigualdad, un sistema de ecuaciones o de desigualdades cualesquiera

Esquema estructural del bloque 6



Módulo 3. La circunferencia

Objetivos: caracterizar en el plano cartesiano el lugar geométrico llamado circunferencia

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones sobre la teoría de conjuntos	1	1
• Manejo de expresiones algebraicas		
– enteras	1	7, 8, 9
– racionales	1	11
– reales	1	13
• Los números complejos (concepto y manejo)	1	14
• Resolución de ecuaciones de primer y segundo grados	2	2, 5
• Resolución de sistemas de ecuaciones	2	3, 11
• Propiedades geométricas de ángulos, triángulos, polígonos convexos y la circunferencia	4	1, 2, 3, 4, 5, 6
• Las funciones trigonométricas directas o inversas	5	1, 3, 4, 5
• Algunas identidades trigonométricas	5	6

3.1

Las cónicas y la ecuación general de segundo grado con dos variables

1

Sabemos que:

Una ecuación de primer grado con dos variables

de la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

$A, B, C \in \mathcal{R} \wedge$ A y B no iguales simultáneamente a cero,

representa una $\underline{\qquad\qquad}$

en el plano cartesiano.

recta

2

La ecuación de segundo grado con dos variables

tiene la forma general:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$A, B, C, D, E, F \in \mathcal{R}$

y puede representar una de estas cuatro curvas:

- **circunferencia**
- **elipse**
- **hipérbola**
- **parábola**

3

Estas cuatro curvas:

- **circunferencia**
- **elipse**
- **hipérbola**
- **parábola**

reciben el nombre genérico de **cónicas.**

4

Se llaman

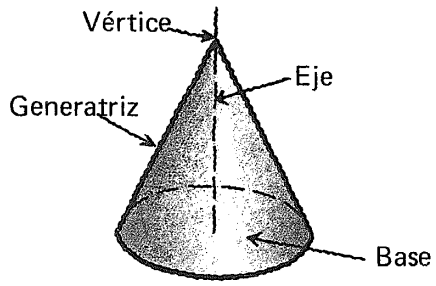
cónicas

porque
se generan de la

intersección de una superficie cónica circular con un plano.

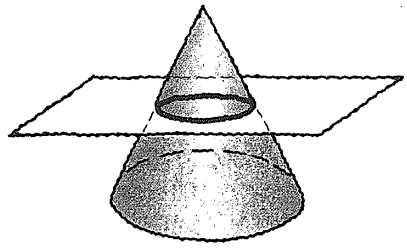
5

Tenemos un cono circular:



6

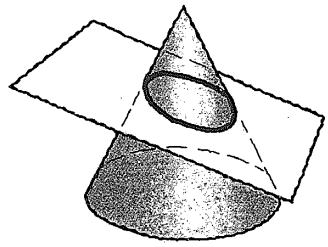
Si un plano es perpendicular
al eje del cono,
y corta a todas las
generatrices,
la curva de intersección
se llama



circunferencia.

7

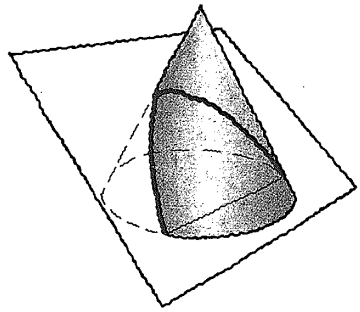
Si el plano no es perpendicular,
al eje
del cono,
y corta a todas
las generatrices,
la curva de intersección
se llama



elipse.

8

Si el plano es paralelo
a una generatriz,
la curva de intersección
se llama

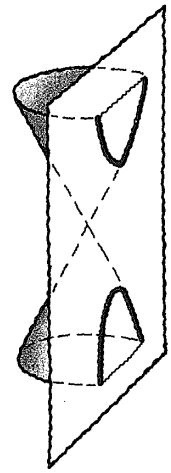


parábola.

9

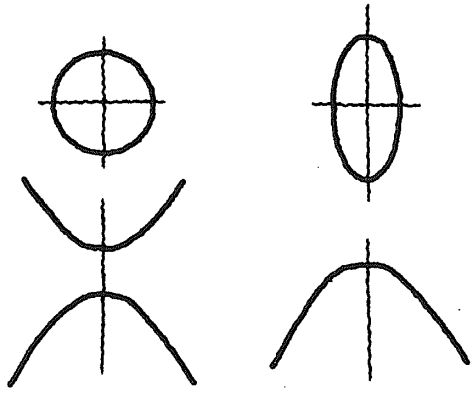
Si el plano es paralelo
al eje del cono
(o más bien: de dos conos
conjugados)
la curva de intersección
recibe el nombre de

hipérbola.



10

Estudiaremos,
por separado,
cada una de
estas cuatro curvas.



6.3.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *explicar*, con sus propias palabras, la forma que adopta la ecuación general de segundo grado con dos variables, y describir brevemente las cuatro cónicas.

3.2

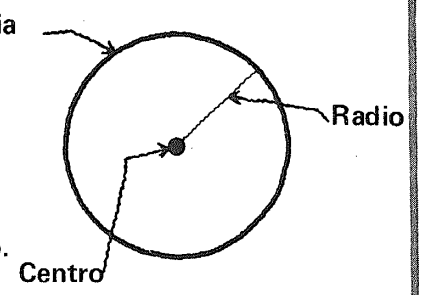
La ecuación de la circunferencia,
en la forma: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

11

Sabemos que

circunferencia

es un conjunto de puntos,
en el plano,
que equidistan de un punto fijo.



12

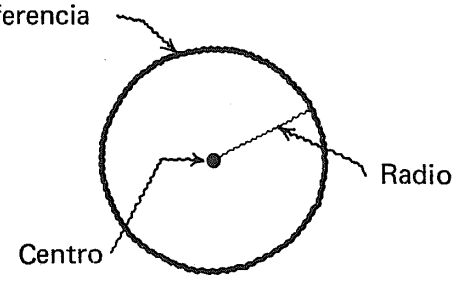
Llamamos

centro

al punto fijo,
y

radio *

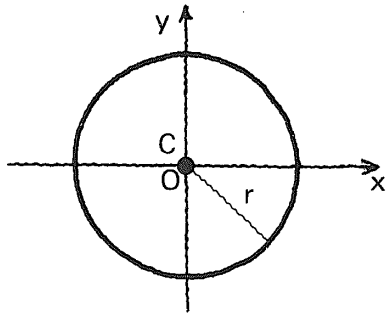
a la distancia del centro
a cualquiera de los puntos
de la circunferencia.



* Recuérdese que hemos llamado **radio**, tanto al segmento cuyos extremos son el centro y cualquiera de los puntos de la circunferencia, como a la medida de este segmento.

13

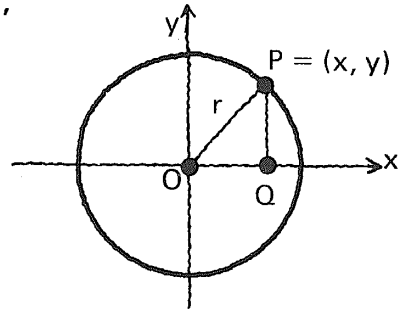
Ahora,
coloquemos nuestro sistema
de ejes cartesianos,
de manera que
el origen (O) coincida
con el centro de la
circunferencia (C).



14

Consideremos
una circunferencia, de radio **r**,*

y un
punto P = (x, y)
perteneciente a ella.



* Debemos entender que $r > 0$

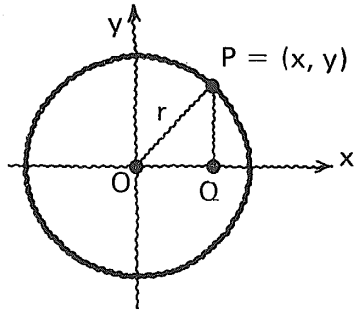
15

En relación con la figura,
podemos escribir:

$|\overline{OQ}| =$ _____

$|\overline{PQ}| =$ _____

$|\overline{OP}| =$ _____

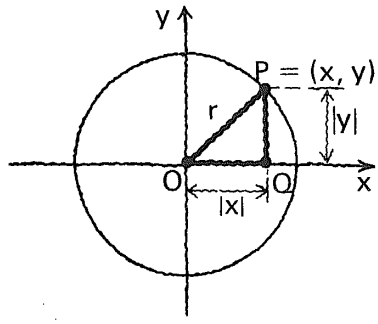


Estudiar con
mucha atención:

- $|x|$ (o x si consideramos que P está en el primer cuadrante)
- $|y|$ (o y si consideramos que P está en el primer cuadrante)
- r (independientemente del cuadrante en que se encuentre P)

16

Para el △ rectángulo OPQ, se verifica, de acuerdo con Pitágoras, que:



$|x|^2 + |y|^2 = r^2$

o bien

- $x^2 + y^2 = r^2$

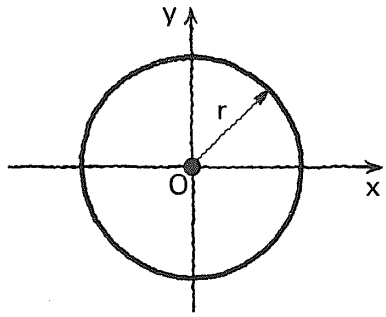
17

$x^2 + y^2 = r^2$

Ésta es una ecuación para una circunferencia de **radio r** con **centro en el origen,**

siempre que

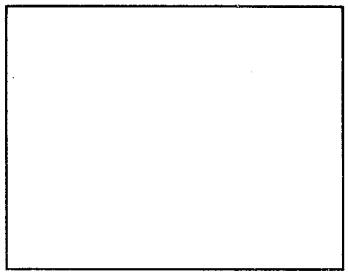
$r \in \mathbb{R} \wedge r > 0$

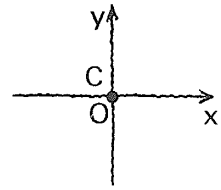


18

¿Qué pasa si r = 0?

Intentemos dar una respuesta:





Atención.

$x^2 + y^2 = r^2$

se transforma en

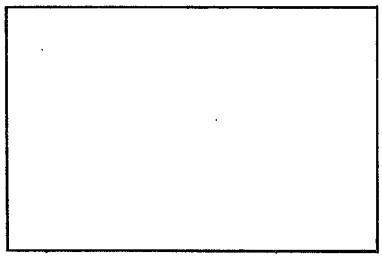
$x^2 + y^2 = 0$

y representa un punto: el origen

19

¿Qué sucede si $r < 0$?

Intentemos dar una respuesta:



La ecuación

$x^2 + y^2 = r^2$

no define
ningún conjunto
de puntos en
el plano real

20

Entonces, escribimos para una circunferencia
de radio r y centro en el origen:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$r \in \mathbb{R} \wedge r > 0$$

21

Se requiere
una ecuación
de una circunferencia
con centro en el origen,
y radio 5.

Trazar su gráfica cartesiana.

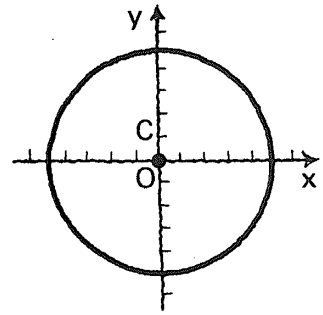
Ver cuadro siguiente.

22

Expresión general: ⌊_____⌋

Datos { ⌊_____⌋ = ⌊_____⌋

Ecuación requerida: ⌊_____⌋



- $x^2 + y^2 = r^2$
- $r = 5$
  $x^2 + y^2 = 5^2$
  o
- $x^2 + y^2 = 25$

23

Dar el centro y el radio
de una circunferencia
una de cuyas ecuaciones es

$$x^2 + y^2 = 15$$

Ver cuadro siguiente.

24

Expresión general: $x^2 + y^2 = r^2$

Ecuación dada: $x^2 + y^2 = 15$

r = ⌊_____⌋

C = ⌊_____⌋

$r^2 = 15$

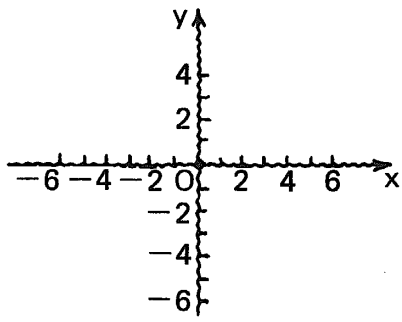
$r = \pm \sqrt{15}$

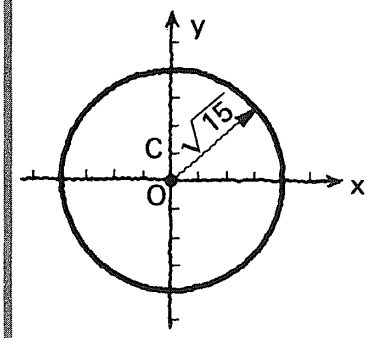
pero, como $r < 0$
no está en el dominio de
la ecuación:

- $r = \sqrt{15} \doteq 3.87$
- $C = (0, 0)$

25

Trazar la gráfica de
$x^2 + y^2 \quad 15$





26

Dar el radio
y el centro
de una circunferencia
una de cuyas ecuaciones
es

$$x^2 + y^2 = -4$$

$x^2 + y^2 = -4$

no define ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano, pues

r^2 debería ser igual a (-4),

y $r = \sqrt{-4}$ es un número no definido en $\mathfrak{R}$.

6.3.2.1

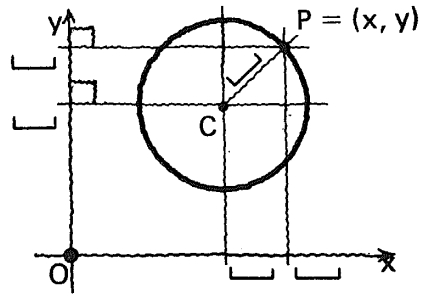
Práctica adicional,
si se considera necesario.

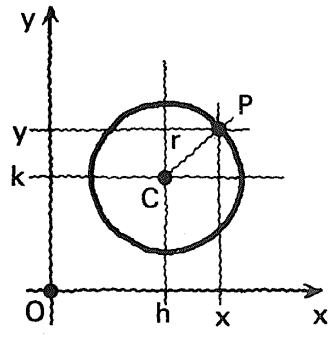
27

Ahora consideremos una circunferencia de radio r con centro en un punto cualquiera: C = (h, k) del plano cartesiano.

P = (x, y) es un punto cualquiera en la circunferencia.

Rotulemos en los lugares indicados.

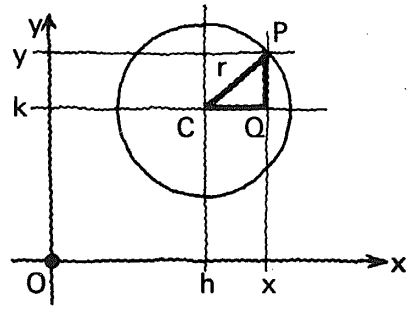




28

$|\overrightarrow{CQ}| =$ _____

$|\overrightarrow{PQ}| =$ _____



$|x - h|$ o $(|h - x|)$

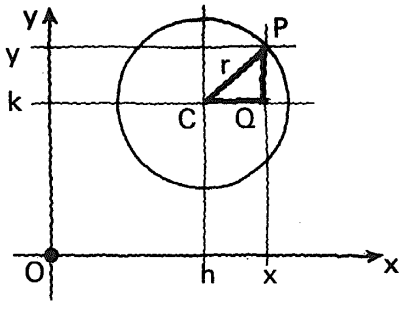
$|y - k|$ o $(|k - y|)$

29

$|\overrightarrow{CQ}| = |x - h|$

$|\overrightarrow{PQ}| = |y - k|$

Para el triángulo rectángulo CPQ debe verificarse, según Pitágoras, que: _____



Atención.

$|x - h|^2 + |y - k|^2 = r^2$

o bien

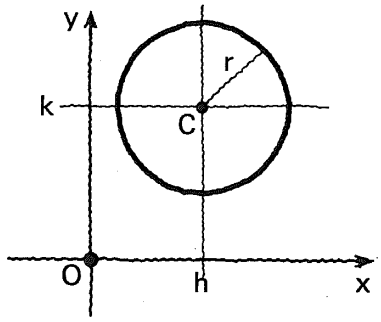
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

30

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

es una ecuación
de una circunferencia
de **radio r**
con **centro** en

$C = (h, k)$



$h \in$ ⌊_____⌋
$k \in$ ⌊_____⌋
$r \in$ ⌊_____⌋

- $\mathcal{R}$
- $\mathcal{R}$
- $\mathcal{R}^+$ $(\mathcal{R} \wedge r > 0)$

31

Podemos observar que la ecuación:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

se transforma en:

⌊_____⌋

para $C = (0,0)$.

$x^2 + y^2 = r^2$

32

Obtener una ecuación de la circunferencia
de radio = 3, y con centro en (2, 4).

Trazar la gráfica cartesiana correspondiente.

Ver cuadro siguiente.

33

Expresión general: $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

Datos $\left\{\begin{array}{l} \underline{\quad} = \underline{\quad} \\ \underline{\quad} = \underline{\quad} \\ \underline{\quad} = \underline{\quad} \end{array}\right.$ $\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\}$ C = $\underline{\quad}$

Ecuación requerida: $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$\left.\begin{array}{l} h = 2 \\ k = 4 \end{array}\right\}$ (2, 4)

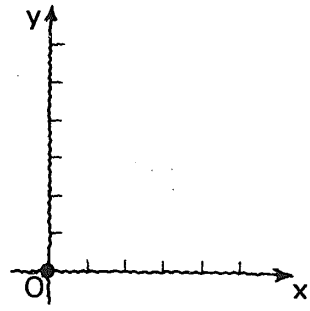
$r = 3$

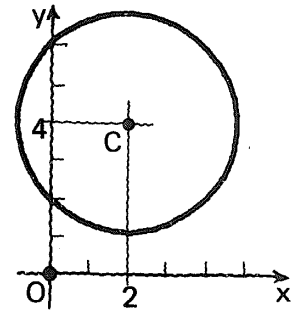
$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$

34

Trazar la gráfica
de la ecuación

$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$





35

Se requiere una ecuación de la circunferencia
de radio igual a $\sqrt{5}$, y con centro en $(-3, -1)$.

Trazar su gráfica cartesiana.

Ver cuadro siguiente.

36

Expresión general: ⌊_____⌋

Datos { ⌊___⌋ = ⌊_____⌋ ; ⌊___⌋ = ⌊_____⌋ } ⌊_____⌋ = ⌊_____⌋

⌊___⌋ = ⌊_____⌋

Ecuación requerida: ⌊_____⌋

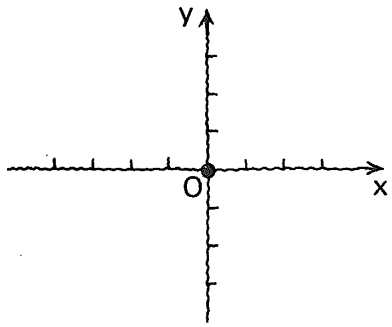
- $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
- $h = -3$, $k = -1$ } $C = (-3, -1)$
- $r = \sqrt{5}$
- $[x - (-3)]^2 + [y - (-1)]^2 = (\sqrt{5})^2$

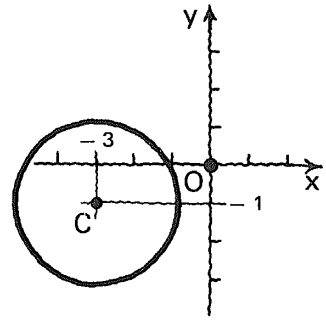
  o bien:
- $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 5$

37

Trazar la gráfica de la ecuación

$(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 5$





38

Hallar una ecuación de la circunferencia de radio igual a $\frac{19}{2}$ y con centro de $\left(3\frac{2}{7}, 0\right)$.

Trazar la gráfica.

Ver cuadro siguiente.

39

Expresión general: ⌊_____⌋

Datos { ⌊_____⌋ = ⌊_____⌋ ; ⌊_____⌋ = ⌊_____⌋ ; ⌊_____⌋ = ⌊_____⌋ } ⌊_____⌋ = ⌊_____⌋

Ecuación requerida: ⌊_____⌋

- $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$
- $h = 3\frac{2}{7} = \frac{23}{7}$
- $k = 0$

$\Big\}\ C = \left(3\frac{2}{7}, 0\right)$

- $r = \frac{19}{2}$
- $\left(x - \frac{23}{7}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{19}{2}\right)^2$

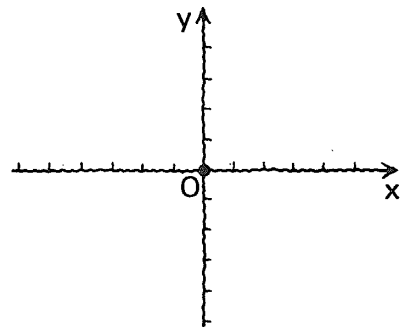
o bien

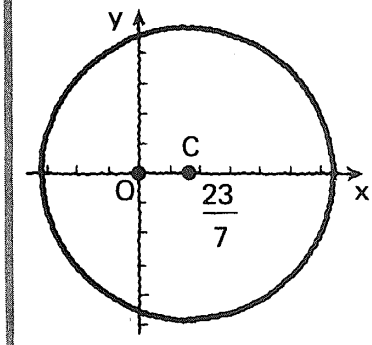
- $\left(x - \frac{23}{7}\right)^2 + y^2 = \frac{361}{4}$

40

Trazar la gráfica de

$$\left(x - \frac{23}{7}\right)^2 + y^2 = \frac{361}{4}$$





41

Dar el centro y el radio de la circunferencia dada por la ecuación

$$(x + 7.33)^2 + (y - 5.27)^2 = 48.96$$

Trazar la gráfica.

Ver cuadro siguiente

42

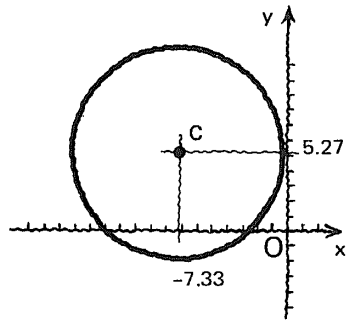
Ecuación dada:

$$(x + 7.33)^2 + (y - 5.27)^2 = 48.96$$

Centro C = ⌊_____⌋

Radio r = ⌊_____⌋

Trazar la gráfica cartesiana.



- (− 7.33, 5.27)
- $\sqrt{48.96} \doteq 7$

43

Dar el centro y el radio de la circunferencia dada por la ecuación:

$$x^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{28}{5}$$

Trazar su gráfica.

Ver cuadro siguiente.

44

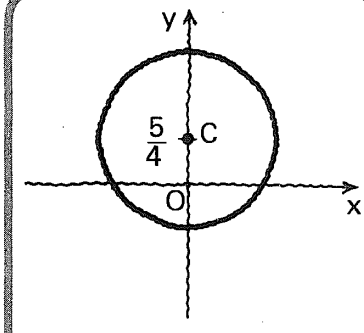
Ecuación dada:

$$x^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{28}{5}$$

Centro C = ⌊_____⌋

Radio r = ⌊_____⌋

Trazar la gráfica cartesiana.



- $(0, \frac{5}{4})$
- $\sqrt{\frac{28}{5}} \doteq 2.37$

6.3.2.2

Práctica adicional,
si se considera necesario

6.3.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* las ecuaciones:
  $x^2 + y^2 = r^2$ y $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
  correspondientes a una circunferencia de radio r y centro en el origen o en un punto (h, k), respectivamente;

- *obtener* la ecuación de una circunferencia, en alguna de las formas: $x^2 + y^2 = r^2$ ó $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
  dados: el radio y el centro;

- *dar* las coordenadas del centro y el radio de una circunferencia dada por una ecuación de alguna de las formas: $x^2 + y^2 = r^2$ ó $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$,
  según tenga el centro en el origen o fuera de él.

3.3.

La ecuación de la circunferencia
en la forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

45

La ecuación de una circunferencia
puede ser expresada en la forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$D, E, F \in \mathbb{R}$$

que llamamos

ecuación general de la circunferencia.

46

Estudiaremos
algunos ejemplos
de

transformación

de una ecuación de la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

en

una ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$

47

Sea la ecuación

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$$

que vamos a transformar en una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

1. Desarrollar los binomios cuadráticos del primer miembro ⌊_____⌋

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 9$

48

Estado inicial:

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$$

Estado intermedio 1:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 9$$

2. Sumar (-9) a ambos miembros.

Estado intermedio 2: ⌊_____⌋

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 - 9 = 0$

49

Estado inicial:

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$$

Estado intermedio 1:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 9$$

Estado intermedio 2:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 - 9 = 0$$

3. Reducir términos semejantes y ordenar de acuerdo con el modelo: ⌊_____⌋

$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$

50

Estudiar con atención el proceso completo de transformación

Estado inicial:

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$$

Estado intermedio 1:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 9$$

Estado intermedio 2:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 - 9 = 0$$

Estado final:

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$$

51

Otros ejemplos

Estado inicial: $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 5$

Estado intermedio 1: ⌊_____⌋

Estado intermedio 2: ⌊_____⌋

Estado final: ⌊_____⌋

$x^2 + 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 5$

$x^2 + 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 - 5 = 0$

$x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$

52

Estado inicial: $\left(x - \frac{23}{7}\right)^2 + y^2 = \frac{361}{4}$

Estado intermedio 1: ⌊_____⌋

Estado intermedio 2: ⌊_____⌋

Estado final: ⌊_____⌋

$x^2 - \frac{46}{7}x + \frac{529}{49} + y^2 = \frac{361}{4}$

$x^2 - \frac{46}{7}x + \frac{529}{49} + y^2 - \frac{361}{4} = 0$

$x^2 + y^2 - \frac{46}{7}x - \frac{15\,573}{196} = 0$

53

Estado inicial: $x^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{28}{5}$

Estado intermedio 1: ⌊_____⌋

Estado intermedio 2: ⌊_____⌋

Estado final: ⌊_____⌋

$x^2 + y^2 - \frac{10}{4}y + \frac{25}{16} = \frac{28}{5}$

$x^2 + y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{25}{16} - \frac{28}{5} = 0$

$x^2 + y^2 - \frac{5}{2}y - \frac{323}{80} = 0$

54

Estado inicial: $(x + 7.33)^2 + (y - 5.27)^2 = 48.96$

Estado intermedio 1: ⌊_____⌋

Estado intermedio 2: ⌊_____⌋

Estado final: ⌊_____⌋

Respuesta en el cuadro siguiente

- $x^2 + 14.66x + 53.73 + y^2 - 10.54y + 27.77 = 48.96$
- $x^2 + 14.66x + 53.73 + y^2 - 10.54y + 27.77 - 48.96 = 0$
- $x^2 + y^2 + 14.66x - 10.54y + 32.54 = 0$

55

Estado inicial: $x^2 + y^2 = 25$

Estado intermedio 1: ⌊_____⌋

Estado intermedio 2: ⌊_____⌋

Estado final: ⌊_____⌋

- $x^2 + y^2 = 25$
- $x^2 + y^2 - 25 = 0$
- $x^2 + y^2 - 25 = 0$

56

En general:

Estado inicial: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Estado intermedio 1: ⌊_____⌋

Estado intermedio 2: ⌊_____⌋

Estado final: ⌊_____⌋

Respuesta en el cuadro siguiente

- $x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r_2$
- $x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 = 0$
- $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$

57

Hemos transformado la ecuación

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

en la ecuación general

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

cuya forma es

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Observamos que:

$D =$ ⌊_____⌋

$E =$ ⌊_____⌋

$F =$ ⌊_____⌋

$-2h$

$-2k$

$h^2 + k^2 - r^2$

58

Ecuación general de la circunferencia.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$D, E, F \in \mathbb{R}$

- $D = -2h$
- $E = -2k$
- centro $C = (h, k)$
- $F = h^2 + k^2 - r^2$
- radio r

59

Ecuación ordinaria de la circunferencia.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

De:

$D = -2h$ obtenemos $h =$ ⌊_____⌋

De:

$E = -2k$ obtenemos $k =$ ⌊_____⌋

$-\frac{D}{2}$

$-\frac{E}{2}$

60

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$h = -\frac{D}{2}$$

$$k = -\frac{E}{2}$$

De: $F = h^2 + k^2 - r^2$ obtenemos:

$r =$ ⌊_____⌋

$r^2 = h^2 + k^2 - F$

↓

● $\sqrt{h^2 + k^2 - F}$

61

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

De:

$$h = -\frac{D}{2}$$

$$k = -\frac{E}{2}$$

$$r = \sqrt{h^2 + k^2 - F}$$

obtenemos r en términos de D, E y F:

$r =$ ⌊_____⌋

$r = \sqrt{h^2 + k^2 - F}$

$r = \sqrt{\frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F}$

$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}}$

↓

● $\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$

62

Ecuación ordinaria de la circunferencia.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$h, k \in \mathbb{R} \wedge r \in \mathbb{R}^+$

- $h = -\frac{D}{2}$
- $k = -\frac{E}{2}$
- $r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$
- $D = -2h$
- $E = -2k$
- $F = h^2 + k^2 - r^2$

63

Ecuación general de la circunferencia.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$D, E, F \in \mathcal{R}$$

- $D = -2h$
- $h = -\dfrac{D}{2}$
- $E = -2k$
- $k = -\dfrac{E}{2}$
- $F = h^2 + k^2 - r^2$
- $r = \dfrac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$

64

Las expresiones de los dos cuadros anteriores
nos permiten transformar
rápidamente una ecuación ordinaria
en una ecuación general,
o viceversa.

65

Por ejemplo,
se quiere transformar la ecuación ordinaria

$$(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 5$$

en una ecuación general.

Modelo de la ecuación general: $\underline{\qquad\qquad\qquad}$

constantes

$\underline{\quad} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

$\underline{\quad} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

$\underline{\quad} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

Esta ecuación general requerida: $\underline{\qquad\qquad\qquad}$

- $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$
- $D = -2h \qquad = -2(-3) = 6$
- $E = -2k \qquad = -2(-1) = 2$
- $F = h^2 + k^2 - r^2 = 9 + 1 - 5 = 5$
- $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$

66

Transformar la ecuación general

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$$

en una ecuación ordinaria.

Modelo de la ecuación ordinaria: _____

Constantes
- _____ = _____ = _____
- _____ = _____ = _____
- _____ = _____ = _____

Ecuación ordinaria requerida: _____

Respuesta en el cuadro siguiente

- $x^2 + y^2 \underbrace{- 4x}_{D} \underbrace{- 8y}_{E} \underbrace{+ 11}_{F} = 0$
- $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
- $h = -\dfrac{D}{2} \qquad = -\dfrac{-4}{2} = 2$
- $k = -\dfrac{E}{2} \qquad = -\dfrac{-8}{2} = 4$
- $r = \dfrac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2} = \dfrac{\sqrt{16 + 64 - 44}}{2} = \dfrac{\sqrt{36}}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$
- $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$

67

Ahora bien,
dada una ecuación general de la forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

queremos saber si tal ecuación:

- representa una circunferencia,
- representa un punto,

  o

- no representa ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano.

68

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

La expresión

$$r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$$

nos permite saber qué conjunto de puntos representa una ecuación general dada.

Observemos con atención esa expresión.

69

Puesto que el radio debe ser un número real positivo para que la ecuación

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

represente una circunferencia, deberá verificarse:

$r > 0$

o bien:

$$\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2} > 0$$

o bien:

$$\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} > 0$$

o bien:

- $D^2 + E^2 - 4F > 0$

70

Entonces, si

$$D^2 + E^2 - 4F > 0$$

sabemos que la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

representa una circunferencia con centro en $C =$ ⌊_____⌋

y con radio $r =$ ⌊_____⌋

- $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$
- $\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$

71

Para que la ecuación:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa un punto en el plano cartesiano, deberá verificarse:

$r = 0$

o bien:

$$\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2} = 0$$

o bien:

$$\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = 0$$

o bien:

- $D^2 + E^2 - 4F = 0$

72

Entonces, si

$$D^2 + E^2 - 4F = 0$$

sabemos que la ecuación

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa un punto en el plano cartesiano, es decir:

$C =$ $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$

73

Finalmente,

para que la ecuación

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

no represente ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano, deberá verificarse:

$r < 0$

o bien:

$$\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2} < 0$$

o bien

$$\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} < 0$$

o bien:

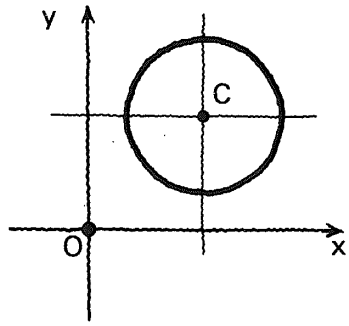
- $D^2 + E^2 - 4F < 0$

Resumiendo.

La ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$D, E, F \in R$

representa:



- una circunferencia de centro

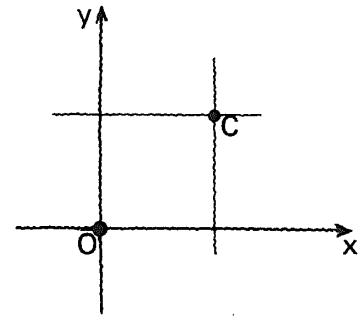
$$c = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$$

y radio

$$r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$$

si y sólo si

$D^2 + E^2 - 4F > 0$

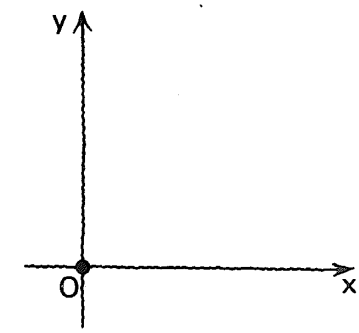


- un punto

$$C = \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$$

si y sólo si

$D^2 + E^2 - 4F = 0$



- ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano

si y sólo si

$D^2 + E^2 - 4F < 0$

6.3.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* el criterio para que una ecuación general de segundo grado, de la forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ represente:
  - una circunferencia
  - un punto

  o

  - ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano;
- *transformar* una ecuación de la forma: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ en una ecuación de la forma: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

3.4

Determinación del centro y el radio de una circunferencia dada por una ecuación general

75

Dada una ecuación de la forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

se requiere saber:

1. qué conjunto de puntos representa en el plano cartesiano;
2. si representa un punto, cuáles son sus coordenadas;
3. si representa una circunferencia, cuál es su centro y cuál su radio.

76

Para resolver el problema planteado en el cuadro anterior, podemos hacer una de estas dos cosas:

1. Transformar la ecuación dada en una ecuación ordinaria de la forma

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

2. Aplicar las expresiones y el criterio establecido en el submódulo anterior.

77

Dada la ecuación

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0$$

se requiere saber:

1. qué conjunto de puntos representa en el plano cartesiano;
2. si se trata de una circunferencia, cuáles son las coordenadas de su centro y cuál es su radio.

78

Procedimiento alternativo 1.

Vamos a transformar la ecuación general

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0$$

en una ecuación ordinaria de la forma

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

79

Estado inicial:

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0$$

1. Sumar + 10 a ambos miembros.

Estado intermedio 1:

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y = 10$$

80

Estado inicial:

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0$$

Estado intermedio 1:

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y = 10$$

2. Agrupar los términos en x y los términos en y.

Estado intermedio 2:

$x^2 - 6x + y^2 + 2y = 10$

81

Estado inicial:

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0$$

Estado intermedio 1:

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y = 10$$

Estado intermedio 2:

$$x^2 - 6x + y^2 + 2y = 10$$

3. Completar trinomios cuadrados perfectos en x e y *

Respuesta en el cuadro siguiente

* Esta operación incluye la de sumar al segundo miembro la suma de los números agregados al primer miembro para conservar la igualdad.

Atención

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 10 + 9 + 1$$

o

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 20$$

Trinomio cuadrado perfecto en x

trinomio cuadrado perfecto en y

82

Estado inicial: $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0$

Estado intermedio 1: $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 10$

Estado intermedio 2: $x^2 - 6x + y^2 + 2y = 10$

Estado intermedio 3:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 10 + 9 + 1 = 20$$

4. Factorizar los trinomios cuadrados perfectos del 1er miembro.

Estado final: [ ]

$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 20$

83

Estudiar con atención el procedimiento completo.

Estado inicial: $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0$

Estado intermedio 1: $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 10$

Estado intermedio 2: $x^2 - 6x + y^2 + 2y = 10$

Estado intermedio 3:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 10 + 9 + 1 = 20$$

Estado final: $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 20$

84

Ecuación dada. $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0$

Comparando esta ecuación $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 20$

con el modelo $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

podemos observar que:

1. tal ecuación representa una circunferencia, puesto que $r^2 > 0$ de donde $r > 0$;
2. el centro de la circunferencia es
   $C =$ [ ]
   y
   el radio $r =$ [ ]

$(3, -1)$

$\sqrt{20}$

85

Procedimiento alternativo 2.

Ecuación dada:

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0$$

Comparando con el modelo

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

vemos que:

D = ⌊_____⌋

E = ⌊_____⌋

F = ⌊_____⌋

- -6
- 2
- -10

86

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$D = -6 \qquad E = 2 \qquad F = -10$

Calculamos: $D^2 + E^2 - 4F =$ ⌊_____⌋

y como $D^2 + E^2 - 4F$ ⌊_____⌋ 0 ($>, <, =$)

la ecuación representa ⌊_____⌋

- $(-6)^2 + 2^2 - 4(-10)$

  $36 + 4 + 40 = 80$

- $>$
- una circunferencia

87

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$D = -6 \qquad E = 2 \qquad F = -10$

El centro de la circunferencia representada es:

C = ⌊_____⌋ = ⌊_____⌋

$$\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$$

$$= \left(-\frac{-6}{2}, -\frac{2}{2}\right)$$

$$= (3, -1)$$

88

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 = 0$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$D = -6 \qquad E = 2 \qquad F = -10$

El radio de la circunferencia es:

$$r = \boxed{\qquad\qquad} = \boxed{\qquad}$$

$$\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{80}}{2} = \frac{2\sqrt{20}}{2}$$

$$= \sqrt{20}$$

89

Tenemos la ecuación

$$400x^2 + 400y^2 + 600x - 320y + 289 = 0$$

Se quiere saber si
representa o no una circunferencia;
en caso afirmativo, necesitamos conocer
su centro y su radio.

90

Procedimiento alternativo 1.

$$400x^2 + 400y^2 + 600x - 320y + 289 = 0$$

Empezaremos por transformar la ecuación dada
a la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$
dividiendo ambos miembros entre 400:

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x - \frac{4}{5}y +$$

$$+ \frac{289}{400} = 0$$

91

Estado inicial: $x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x - \frac{4}{5}y + \frac{289}{400} = 0$

Estado intermedio 1. [ ]

Estado intermedio 2: [ ]

Estado intermedio 3: [ ]

Estado final: [ ]

Modelo del estado final: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

- $x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x - \frac{4}{5}y = -\frac{289}{400}$
- $x^2 + \frac{3}{2}x + y^2 - \frac{4}{5}y = -\frac{289}{400}$
- $x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} + y^2 - \frac{4}{5}y + \frac{4}{25} = 0$
- $\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{5}\right)^2 = 0$

92

$$x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x - \frac{4}{5}y + \frac{289}{400} = 0$$

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{5}\right)^2 = 0$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Observamos que,
nuestra ecuación representa [ ]

porque [ ]

- un punto
- $r^2 = 0$ de donde $r = 0$

93

Procedimiento alternativo 2.

$x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x - \frac{4}{5}y + \frac{289}{400} = 0$

D = [ ]

E = [ ]

F = [ ]

$D^2 + E^2 - 4F =$ [ ]

como $D^2 + E^2 - 4F$ [ ]

la ecuación dada representa [ ]

- $\frac{3}{2}$
- $-\frac{4}{5}$
- $\frac{289}{400}$
- $\frac{9}{4} + \frac{16}{25} - \frac{289}{100} = \frac{225 + 64 - 289}{100} = 0$
- = 0
- un punto

94

El punto representado por la ecuación

$$x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x - \frac{4}{5}y + \frac{289}{400} = 0$$

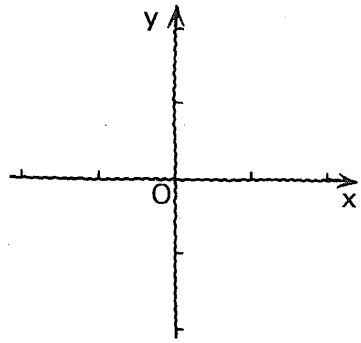
es C = [_____] = [_____]

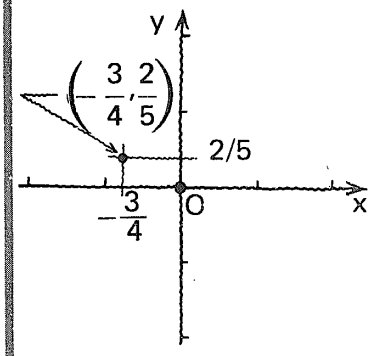
$$\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) = \left(-\frac{3}{4}, \frac{2}{5}\right)$$

95

Representación gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x - \frac{4}{5}y + \frac{289}{400} = 0$$





96

Se requiere saber si la ecuación

$$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 50 = 0$$

representa una circunferencia, un punto, o ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano.
En caso de representar una circunferencia, se requiere conocer su centro y su radio.

97

Procedimiento alternativo 1.

Estado inicial:

$$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 50 = 0$$

Estado intermedio 1: ⌊_____⌋

Estado intermedio 2: ⌊_____⌋

Estado intermedio 3: ⌊_____⌋

Estado final: ⌊_____⌋

Modelo del estado final: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Respuesta en el cuadro siguiente

- $x^2 + y^2 - 6x - 10y = -50$
- $x^2 - 6x + y^2 - 10y = -50$
- $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = -16$
- $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = -16$

98

$$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 50 = 0$$

$$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = -16$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Conclusión:

La ecuación dada no representa ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano, puesto que:

$r^2 = -16$, de donde

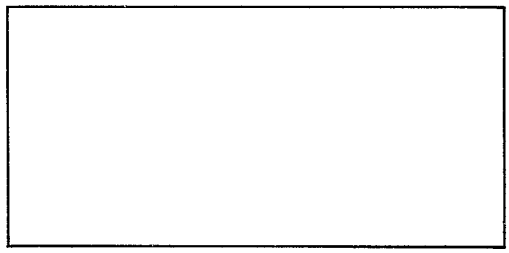
$r = \sqrt{-16}$ ∴

el radio no está definido en el conjunto de los números reales.

99

Procedimiento alternativo 2.

$$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 50 = 0$$



$D = -6$

$E = -10$

$F = 50$

$D^2 + E^2 - 4F = 36 + 100 - 200$
$= -64$

como $D^2 + E^2 - 4F < 0$

la ecuación no representa ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano

6.3.4.1

Práctica adicional,
si se
considera necesario.

6.3.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* si una ecuación de la forma:
  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa una circunferencia, un punto o ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano;

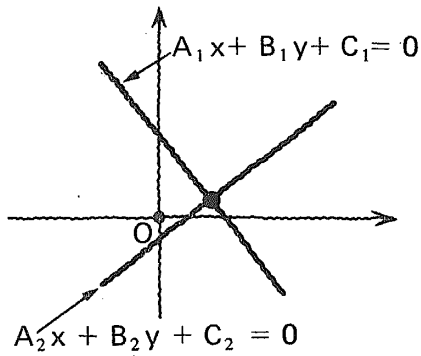
- *determinar* el centro y el radio de una circunferencia dada por una ecuación de la forma:
  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, que se identifique como representativa de tal conjunto de puntos en el plano.

3.5

Intersección de circunferencias

100

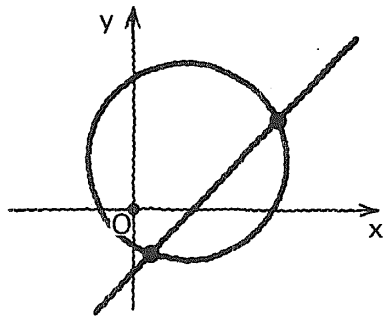
Hemos visto
que para
encontrar el
punto de intersección
de dos rectas concurrentes,
dadas por dos
ecuaciones de primer grado,
se requiere:



encontrar el conjunto
solución del sistema
conjuntivo formado por
las dos ecuaciones

101

De manera similar,
para determinar
la intersección
de una
circunferencia
y una
recta
será necesario:



encontrar el conjunto
solución del sistema
conjuntivo formado por
la ecuación de la
circunferencia y la de
la recta

102

Determinemos,
entonces,
la intersección
de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$$

y la recta

$$3x - 4y + 16 = 0$$

103

El problema consiste
en resolver el sistema

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$$
$$\wedge$$
$$3x - 4y + 16 = 0$$

104

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0 \qquad (1)$$
$$\wedge$$
$$3x - 4y + 16 = 0 \qquad (2)$$

En la ecuación (2) despejemos, por ejemplo, y

$$y = \boxed{\qquad\qquad} \qquad (2')$$

$$\frac{3}{4}x + 4$$

105

$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$ (1)

$\wedge$

$3x - 4y + 16 = 0$ (2)

$y = \frac{3}{4}x + 4$ (2')

Sustituyamos (2') en (1):

(1')

- $x^2 + \left(\frac{3}{4}x + 4\right)^2 - 6x - 4\left(\frac{3}{4}x + 4\right) - 3 = 0$

106

Hemos obtenido una ecuación con una sola variable:

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}x + 4\right)^2 - 6x - 4\left(\frac{3}{4}x + 4\right) - 3 = 0$$

que podemos simplificar así:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Ecuación simplificada de la forma

Respuesta en el cuadro siguiente

$$x^2 + \frac{9}{16}x^2 + 6x + 16 - 6x - 3x - 16 - 3 = 0$$

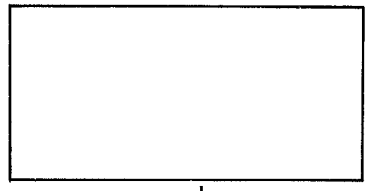
$$\frac{25}{16}x^2 - 3x - 3 = 0$$

- $25x^2 - 48x - 48 = 0$

107

$25x^2 - 48x - 48 = 0$

Resolvemos la ecuación resultante



$x_1 \doteq$ ⌊ ⌋
o
$x_2 \doteq$ ⌊ ⌋

} expresar con dos cifras decimales

$$x = \frac{48 \pm \sqrt{48^2 + 4\,800}}{50}$$

$$x = \frac{48 \pm \sqrt{2\,304 + 4\,800}}{50}$$

$$x = \frac{48 \pm \sqrt{7\,104}}{50}$$

$$x = \frac{48 \pm 84.29}{50}$$

2.65

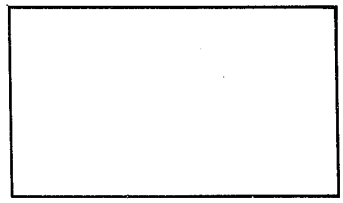
−0.73

108

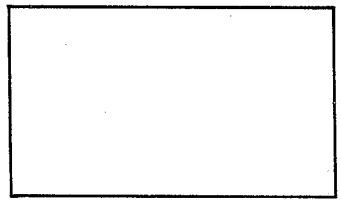
Sustituimos estos valores de x,

en $y = \frac{3}{4}x + 4$

- $x_1\doteq 2.65$



- $x_2 \doteq -0.73$



para obtener:

$y_1 \doteq$ ⌊ ⌋ $y_2 \doteq$ ⌊ ⌋

Respuesta en el cuadro siguiente

$$y_1 \doteq \frac{3}{4}(2.65) + 4 \qquad y_2 \doteq \frac{3}{4}(-0.73) + 4$$

$$y_1 \doteq 1.99 + 4 \qquad y_2 = -0.55 + 4$$

- $y_1 \doteq 5.99$
- $y_2 = 3.45$

109

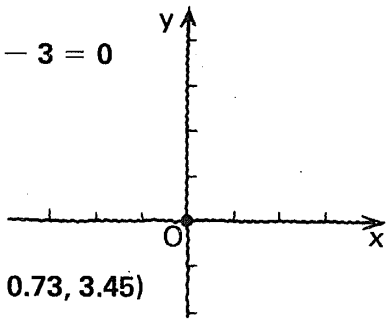
$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0 \quad (1)$$
$$\wedge$$
$$3x - 4y + 16 = 0 \quad (2)$$

Conjunto solución obtenido:

$$S = \{(2.65, 5.99), (-0.73, 3.45)\}$$

110

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$$
$$\wedge$$
$$3x - 4y + 16 = 0$$



Puntos de intersección:

$I_1 = (2.65, 5.99)$ $I_2 = (-0.73, 3.45)$

Representemos gráficamente esta situación.

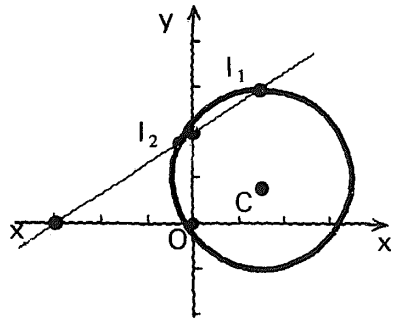
Respuesta en el cuadro siguiente

$$h = -\frac{D}{2} = 3$$
$$k = -\frac{E}{2} = 2$$
$$r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2} = 4$$

} Circunferencia

$$a = -\frac{C}{A} = -\frac{16}{3}$$
$$b = -\frac{C}{B} = 4$$

} recta



111

Hallar la intersección
de la recta

$$4x + 3y - 25 = 0$$

y la
circunferencia

$$x^2 + y^2 = 25$$

112

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad (1)$$

$\wedge$

$$4x + 3y - 25 = 0 \qquad (2)$$

Despejar una de las variables, por
ejemplo **y** ,
de la ecuación (2.)

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$$

113

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad (1)$$

$\wedge$

$$4x + 3y - 25 = 0 \qquad (2)$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3} \qquad (2')$$

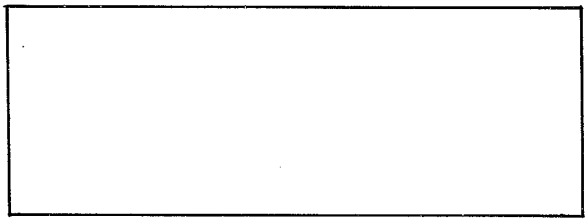
Sustituir (2') en (1).

(1')

$$x^2 + \left(-\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}\right)^2 = 25$$

114

Desarrollando $x^2 + \left(-\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}\right)^2 = 25$



obtenemos la ecuación simplificada, de la forma $ax^2 + bx + c = 0$: ⌊_____⌋

$x^2 + \frac{16}{9}x^2 - \frac{200x}{9} + \frac{625}{9} = 25$

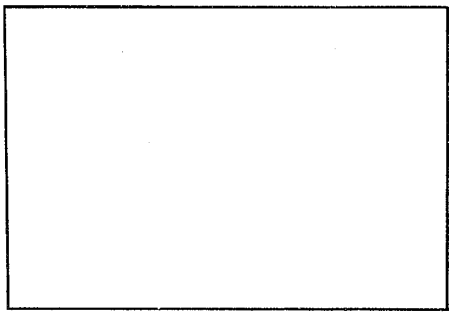
$\frac{25x^2}{9} - \frac{200x}{9} + \frac{400}{9} = 0$

$25x^2 - 200x + 400 = 0$

● $x^2 - 8x + 16 = 0$

115

Resolver $x^2 - 8x + 16 = 0$



$x_1 \doteq$ ⌊__⌋

$x_2 \doteq$ ⌊__⌋

$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2}$

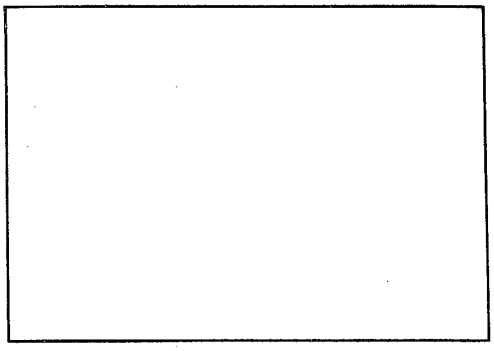
$x = 4$

● 4

● 4

116

Sustituir $x = 4$ en (2'):



$y =$ ⌊__⌋

$y = -\frac{4}{3}(4) + \frac{25}{3}$

$y = -\frac{16}{3} + \frac{25}{3}$

$y = \frac{9}{3}$

● 3

117

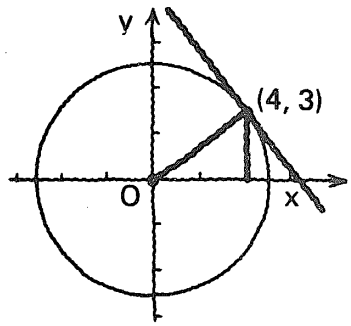
$x^2 + y^2 = 25$ (1)

$\wedge$

$4x + 3y - 25 = 0$ (2)

Punto único de intersección $I = (4, 3)$

Trazar la gráfica.



118

Hallar la intersección
de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$$

con la recta

$$3x - 2y + 6 = 0$$

119

$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$ (1)

$\wedge$

$3x - 2y + 6 = 0$ (2)

Conjunto solución = $\llcorner\_\_\_\_\_\lrcorner$

Respuesta en el
cuadro siguiente

De (2):

$$y = \frac{3}{2}x + 3 \qquad (2')$$

sustituyendo (2') en (1):

$$x^2 + \left(\frac{3}{2}x + 3\right)^2 - 10x - 6\left(\frac{3}{2}x + 3\right) + 25 = 0$$

$$13x^2 - 40x + 64 = 0$$

$$x = \frac{40 \pm \sqrt{1\,600 - 3\,328}}{26} = \text{número real no definido}$$

- ϕ

20

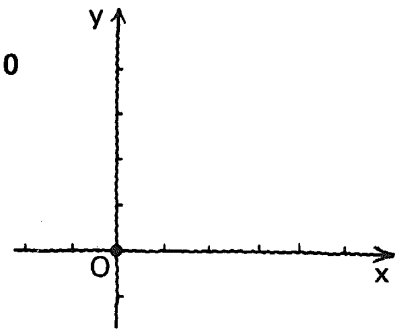
$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$$

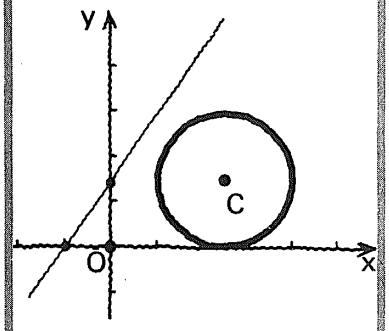
$\wedge$

$$3x - 2y + 6 = 0$$

$S = \phi$

Trazar la gráfica



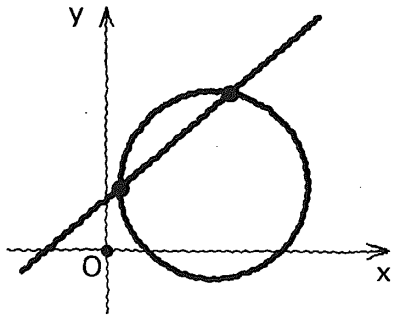


121

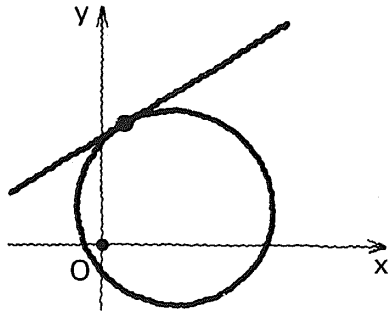
Estudiemos con atención
el resumen
del cuadro siguiente.

Para encontrar la intersección de una circunferencia y una recta, se resuelve el sistema conjuntivo formado por sus ecuaciones.

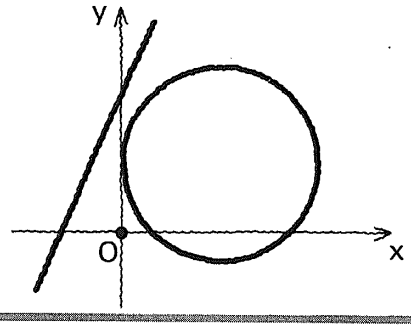
1. Si se obtienen **dos soluciones** distintas en $\mathcal{R}$ la recta es **secante.**



2. Si se obtiene **una solución** (dos soluciones iguales en $\mathcal{R}$ la recta es **tangente.**



3. Si no se obtiene solución en $\mathcal{R}$, la recta **no interseca** a la circunferencia.



6.3.5.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

123

Ahora, se requiere hallar la intersección de dos circunferencias.

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 9 = 0 \quad (1)$$

y

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 3 = 0 \quad (2)$$

Para ello será necesario:

└_____┘

resolver el sistema conjuntivo formado por las dos ecuaciones dadas.

124

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0 \quad (1)$$

$\wedge$

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 3 = 0 \quad (2)$$

Para resolver este sistema haremos lo siguiente.

1. Despejaremos una de las variables de la ecuación (1) en este caso **y**. Para ello, empezaremos por escribir la ecuación en esta forma: $x^2 - 6x + y^2 - 2y = 15$

y "completar cuadrados" en x e y: └_____┘

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 25$

125

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 25$$

Factorizamos los dos trinomios cuadrados perfectos resultantes y efectuamos el despeje de **y**:

y = └_____┘

$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$

$(y-1)^2 = 25 - (x-3)^2$

$y - 1 = \pm\sqrt{25 - (x-3)^2}$

• $1 \pm \sqrt{25 - (x-3)^2}$

126

$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$ (1)

$\wedge$

$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 3 = 0$ (2)

De (1) obtuvimos $y = 1 \pm \sqrt{25 - (x - 3)^2}$ (1')

De manera análoga,
despejamos y de la ecuación (2):

$y =$ ⌊ ⌋ (2)

$x^2 + 4x + y^2 + 6y = 3$

$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 1C$

$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

$(y + 3)^2 = 16 - (x + 2)^2$

$y + 3 = \pm \sqrt{16 - (x + 2)^2}$

● $-3 \pm \sqrt{16 - (x + 2)^2}$

127

Tenemos:

$y = 1 \pm \sqrt{25 - (x - 3)^2}$ (1')

$y = -3 \pm \sqrt{16 - (x + 2)^2}$ (2')

Por transitividad:

⌊ ⌋ (3)

$1 \pm \sqrt{25 - (x - 3)^2}$
$= -3 \pm \sqrt{16 - (x + 2)^2}$

128

$1 \pm \sqrt{25 - (x - 3)^2} = -3 \pm \sqrt{16 - (x + 2)^2}$

Consideremos una de las cuatro ecuaciones posibles,
con signo + en los dos miembros:

$1 + \sqrt{25 - (x - 3)^2} = -3 + \sqrt{16 - (x + 2)^2}$

y resolvamos para x :

$x \doteq$ ⌊ ⌋

Respuesta en el
cuadro siguiente

$$\sqrt{25 - (x-3)^2} = -4 + \sqrt{16 - (x+2)^2}$$

$$25 - (x-3)^2 = 16 - 8\sqrt{16 - (x+2)^2} + 16 - (x+2)^2$$

$$6 - 5x = 4\sqrt{16 - (x+2)^2}$$

$$(6 - 5x)^2 = 16[16 - (x+2)^2]$$

$$41x^2 + 4x - 156 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 25\,584}}{82}$$

$$x = \frac{-4 \pm 160}{82} \quad \begin{cases} \bullet\ x_1 \doteq 1.90 \\ \bullet\ x_2 = -2 \end{cases}$$

129

Verifiquemos:

$$1 \pm \sqrt{25 - (x-3)^2} = -3 \pm \sqrt{16 - (x+2)^2}$$

para

- $x_1 \doteq 1.90$

para

- $x_2 = -2$

Respuesta en el cuadro siguiente

Para $x_1 \doteq 1.90$

$$1 \pm \sqrt{25 - (1.90 - 3)^2} = -3 + \sqrt{16 - (1.90 + 2)^2}$$

$$1 \pm 4.88 = -3 \pm 0.88$$

$$-3.88 = -3.88 \text{ PCV}$$

considerando signo − en ambos miembros.

Para $x_2 = -2$

$$1 \pm \sqrt{25 - (-2 - 3)^2} = -3 \pm \sqrt{16 - (-2 + 2)^2}$$

$$1 = -3 \pm 4$$

$$1 = 1 \quad \text{PCV}$$

considerando signo + o − en el primer miembro y signo + en el segundo.

130

Sustituyamos

$x_1 \doteq 1.90$

y

$x_2 = -2$

en cualquiera de las ecuaciones para y; digamos en:

$y = 1 \pm \sqrt{25 - (x - 3)^2}$:

$y_1 \doteq$ ⌊_____⌋ $y_2 \doteq$ ⌊_____⌋

Para $x_1 \doteq 1.90$

$y_1 \doteq 1 \pm \sqrt{25 - (1.90 - 3)^2}$

$y_1 \doteq 1 \pm \sqrt{23.79}$

$y_1 \doteq 1 \pm 4.88$

- $y_{1,1} \doteq 5.88$
- $y_{1,2} \doteq -3.88$

Para $x_2 = -2$

$y_2 = 1 \pm \sqrt{25 - (-2 - 3)^2}$

$y_2 = 1 \pm \sqrt{25 - 25}$

$y_2 = 1 \pm 0$

- $y_2 = 1$

131

$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$ (1)

$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 3 = 0$ (2)

Obtenemos el siguiente conjunto solución sujeto a comprobación en las ecuaciones originales (1) y (2):

$S = \{(1.90, 5.88), (1.90, -3.88), (-2, 1)\}$ Ver cuadro siguiente

Encontramos que:

(1.90, 5.88) { satisface / no satisface } el sistema dado

(1.90, −3.88) { satisface / no satisface } el sistema dado

(−2, 1) { satisface / no satisface } el sistema dado

- no satisface
- satisface
- satisface

132

$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$ (1)

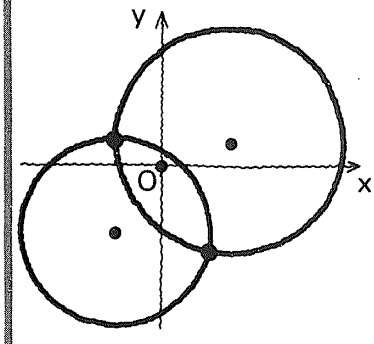
$\wedge$

$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 3 = 0$ (2)

Conjunto solución verificado:

$S = \{(1.90, -3.88), (-2, 1)\}$

Trazar la gráfica cartesiana.

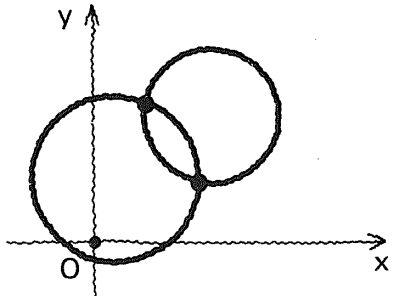


Vemos que la gráfica cartesiana es un valioso auxiliar en la solución de este tipo de problemas

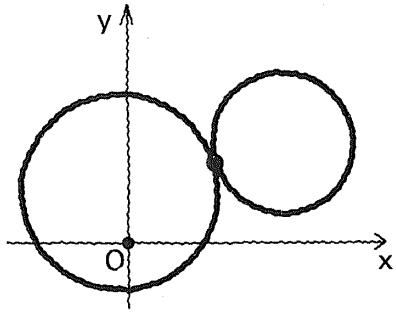
Resumen

Para determinar la intersección de dos circunferencias, se resuelve el sistema conjuntivo formado por sus ecuaciones.

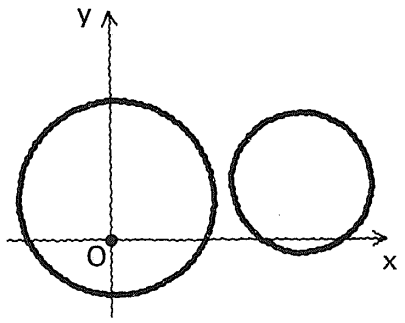
1. Si se obtienen **dos soluciones** distintas en $\mathbb{R}$, las dos circunferencias son **secantes.**



2. Si se obtiene **una solución** en $\mathbb{R}$, las circunferencias son **tangentes.**



3. Si no se obtiene **ninguna solución** real, las circunferencias **no se intersecan** —son ajenas—.



6.3.5.2

Práctica adicional
si se considera necesario.

6.3.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* la intersección de una recta y una circunferencia, dadas por sus ecuaciones;
- *obtener* la intersección de dos circunferencias, dadas por sus ecuaciones.

3.6

Circunferencia dada por tres condiciones

134

Para determinar la ecuación de una circunferencia dada por tres condiciones independientes,
se expresan éstas algebraicamente.

Cada condición se traduce en una ecuación.

La solución del sistema resultante,
de tres ecuaciones con tres incógnitas,
nos permite calcular
las constantes de la ecuación requerida.

135

Se requiere una ecuación de la circunferencia "que pasa" por los puntos:

$P_1 = (2, 3)$
$P_2 = (-4, 0)$
$P_3 = (3, -2)$

así como su centro y su radio.

136

Decidimos expresar la ecuación
en la forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Para que esta ecuación quede definida,
se requiere
conocer las constantes D, E y F.

137

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Puesto que los puntos dados
pertenecen a la circunferencia,
sus coordenadas deberán satisfacer
su ecuación.

138

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Sustituyendo las coordenadas de
$P_1 = (2, 3)$
en la "ecuación tipo", obtenemos:

$$(2)^2 + (3)^2 + 2D + 3E + F = 0$$
$$4 + 9 + 2D + 3E + F = 0$$

- $2D + 3E + F = -13$ ①

139

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$2D + 3E + F = -13$ (1)

De manera similar, podemos obtener:

para $P_2 = (-4, 0)$: _____ (2)

y

para $P_3 = (3, -2)$: _____ (3)

- $-4D + F = -16$
- $3D - 2E + F = -13$

140

El problema consiste, ahora, en resolver el sistema

$$2D + 3E + F = -13 \quad (1)$$
$$4D - F = 16 \quad (2)$$
$$3D - 2E + F = -13 \quad (3)$$

141

$2D + 3E + F = -13$ (1)

$4D - F = 16$ (2)

$3D - 2E + F = -13$ (3)

Resolvamos pues este sistema por el método que se desee.

D = _____ E = _____ F = _____

- $D = 5/11$
- $E = 1/11$
- $F = -156/11$

142

Encontramos,

$$D = 5/11 \quad E = 1/11 \quad F = -156/11$$

que sustituidos en:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

nos definen la ecuación:

$$x^2 + y^2 + \frac{5}{11}x + \frac{1}{11}y - \frac{156}{11} = 0$$

o bien:

$$11x^2 + 11y^2 + 5x + y - 156 = 0$$

143

$$x^2 + y^2 + \frac{5}{11}x + \frac{1}{11}y - \frac{156}{11} = 0$$

$h =$ ____

$k =$ ____

centro:

$C =$ ____

radio:

$r =$ ____

- $h = -\frac{D}{2} = -\frac{5}{22} \doteq -0.23$
- $k = \frac{E}{2} = -\frac{1}{22} \doteq -0.05$
- $C = \left(-\frac{5}{22}, -\frac{1}{22}\right)$
- $r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$
- $\sqrt{\frac{\frac{25}{121} + \frac{1}{121} + \frac{624}{11}}{2}} \doteq 3.77$

144

Tracemos la circunferencia con:

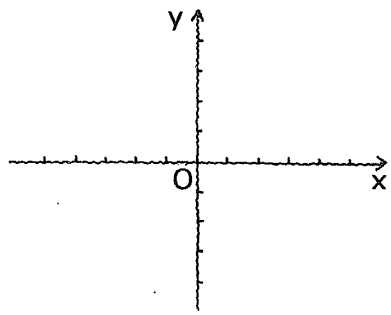
$C = \left(-\frac{5}{22}, -\frac{1}{22}\right)$

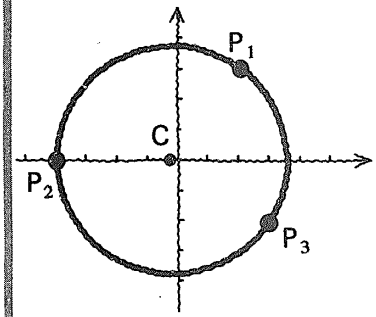
y

$r \doteq 3.77$

y verifiquemos
si pasa por los puntos:

$P_1 = (2, 3)$
$P_2 = (-4, 0)$
$P_3 = (3, -2)$





145

$$11x^2 + 11y^2 + 5x + y - 156 = 0$$

Verificación analítica.

Los pares ordenados: (2, 3), (− 4, 0) y (3, − 2) deben satisfacer la ecuación. Veámoslo.

(2, 3): ⌊_____⌋

(− 4, 0): ⌊_____⌋

(3, − 2): ⌊_____⌋

Respuesta en el cuadro siguiente

- $11(4) + 11(9) + 5(2) + 3 - 156 = 0$
  $44 + 99 + 10 + 3 - 156 = 0$
  $156 - 156 = 0$
  $0 = 0$ PCV

- $11(16) + 11(0) + 5(-4) + 0 - 156 = 0$
  $176 - 20 - 156 = 0$
  $176 - 176 = 0$
  $0 = 0$ PCV

- $11(9) + 11(4) + 5(3) + (-2) - 156 = 0$
  $99 + 44 + 15 - 2 - 156 = 0$
  $158 - 158 = 0$
  $0 = 0$ PCV

146

Dar una ecuación de la circunferencia que tiene su centro en C = (1, 2) y pasa por el punto (3, − 1).

147

En esta ocasión, seleccionamos para nuestra ecuación la forma ordinaria

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Es necesario conocer h, k y r para que la ecuación quede bien definida.

148

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Traduzcamos la condición "tiene su centro en C = (1, 2)" a términos algebraicos:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = r^2$$

149

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = r^2$$

Expresemos la condición "pasa por el punto (3, − 1)" en forma algebraica:

$$(3 - 1)^2 + (- 1 - 2)^2 = r^2$$

o bien:

- $r^2 = (2)^2 + (- 3)^2 = 4 + 9 = 13$

150

Con $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = r^2$
y $r^2 = 13$

nuestra ecuación queda definida así:

$$\_\_\_\_\_$$

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 13$

151

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 13$$

Si se requiere la ecuación general

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

puede quedar expresada así:

$$\_\_\_\_\_$$

$D = -2h = -2(1) = -2$

$E = -2k = -2(2) = -4$

$F = h^2 + k^2 - r^2 = 1 + 4 - 13 = -8$

● $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 8 = 0$

152

Representación gráfica de
la circunferencia

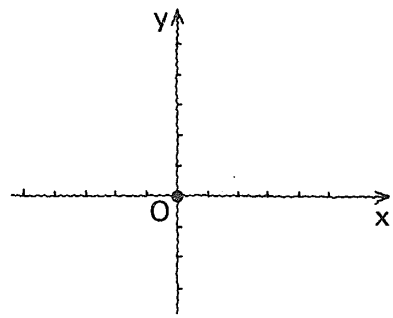
$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 8 = 0$

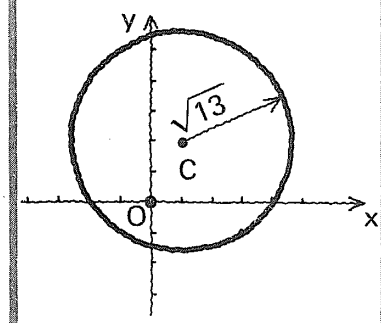
o de

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 13$

en que

$C = (1, 2)$
y $(3, -1)$ está en la
circunferencia.

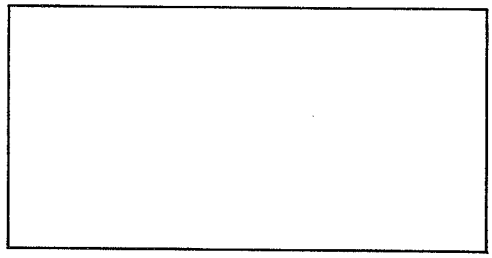




153

Finalmente,
verifiquemos si (3, − 1)
satisface (algebraicamente) la
ecuación:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 8 = 0$$



la satisface/no la satisface.

$(3)^2 + (-1)^2 - 2(3) - 4(-1) - 8 = 0$
$9 + 1 - 6 + 4 - 8 = 0$
$14 - 14 = 0$
$0 = 0$

PCV

la satisface

6.3.6.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

6.3.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* una ecuación de una circunferencia dada por tres condiciones independientes, dando su centro y su radio, y trazando la gráfica cartesiana correspondiente.

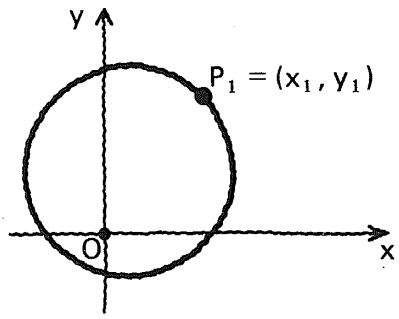
3.7

Tangentes a una circunferencia

154

Tenemos una circunferencia y un punto $P_1 = (x_1, y_1)$ perteneciente a ella.

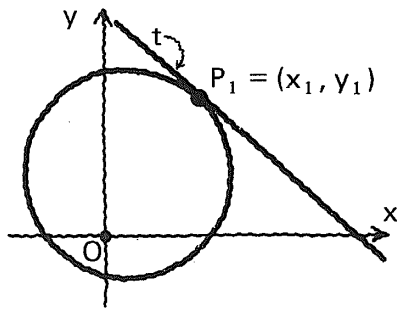
¿Cuántas tangentes a la circunferencia podemos trazar por P_1?



una sola

155

Estamos interesados en una ecuación para esta tangente.



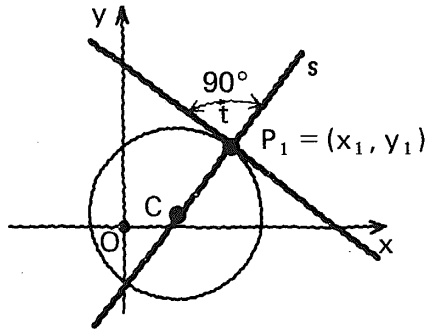
156

Para obtenerla echaremos mano del siguiente hecho geométrico.

La recta s *que contiene al centro* C *y a un punto* $P_1 = (x_1, y_1)$ *de la circunferencia,*

es perpendicular a

la tangente t *a la circunferencia en el punto* P_1.

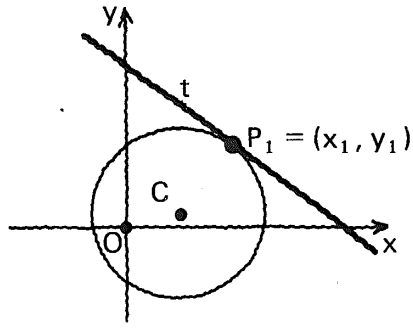


157

Veamos.

Una ecuación de la recta t que pasa por P_1 con pendiente m_t es

$y - y_1 = m_t (x - x_1)$

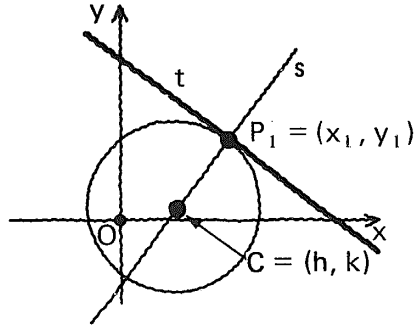


158

$y - y_1 = m_t (x - x_1)$

La pendiente de s es

$m_s =$ $\frac{y_1 - k}{x_1 - h}$ ó $\frac{k - y_1}{h - x_1}$

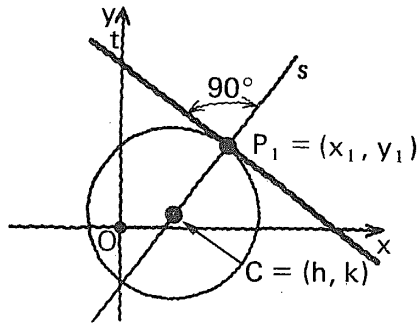


159

$y - y_1 = m_t (x - x_1)$

La pendiente de t es

$m_t =$ ⌊_____⌋

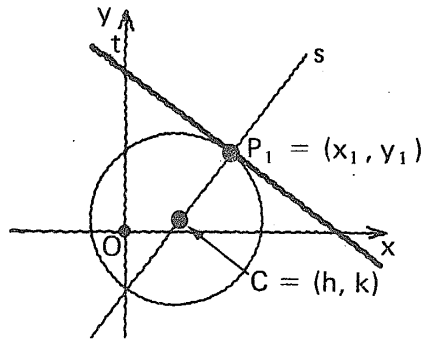


$-\frac{1}{m_s}$

160

Entonces, podemos escribir la siguiente ecuación para t:

- $y - y_1 = -\frac{1}{m_s}(x - x_1)$ $\quad m_s \neq 0$
- $m_s = \frac{y_1 - k}{x_1 - h}$ $\quad x_1 \neq h$



161

Se requiere una ecuación de la tangente a la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$

en (5, 1).

Ver cuadro siguiente.

162

Expresión general ⌊_____⌋

$$y - y_1 = -\frac{1}{m_s}(x - x_1)$$

163

$$y - y_1 = -\frac{1}{m_s}(x - x_1)$$

en donde

$m_s =$ ⌊_____⌋

$$\frac{y_1 - k}{x_1 - h}$$

164

$$y - y_1 = -\frac{1}{m_s}(x - x_1)$$

$$m_s = \frac{y_1 - k}{x_1 - h}$$

Vemos que es necesario determinar:

$C = (h, k)$

165

De

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$

podemos conocer el centro C.

$$\left.\begin{array}{l} h = \underline{\qquad\qquad\qquad} \\ k = \underline{\qquad\qquad\qquad} \end{array}\right\} C = \underline{\qquad\qquad}$$

- $h = -\frac{D}{2} = -\frac{-4}{2} = 2$
- $k = -\frac{E}{2} = -\frac{6}{2} = -3$
- $(2, -3)$

166

Conociendo $C = (2, -3)$

podemos determinar:

$$m_s = \frac{y_1 - k}{x_1 - h} = \frac{\underline{\qquad\qquad}}{\underline{\qquad\qquad}}$$

- $\frac{1 - (-3)}{5 - 2}$
- $\frac{4}{3}$

167

Entonces, sabiendo que

$$y - y_1 = -\frac{1}{m_s}(x - x_1)$$

y

$$m_s = \frac{4}{3}$$

podemos escribir, para la tangente buscada:

$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

Todas éstas son ecuaciones de la tangente t:

$y - 1 = -\frac{3}{4}(x - 5)$

o

$y = -\frac{3}{4}(x - 5) + 1$

o

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4} + 1$

o

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{19}{4}$

o

$3x + 4y - 19 = 0$

168

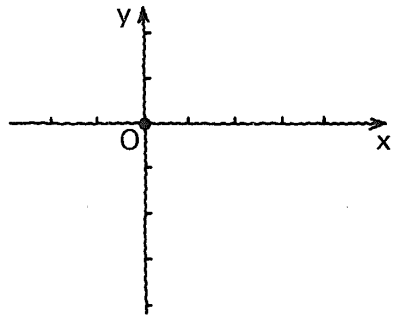
Circunferencia:

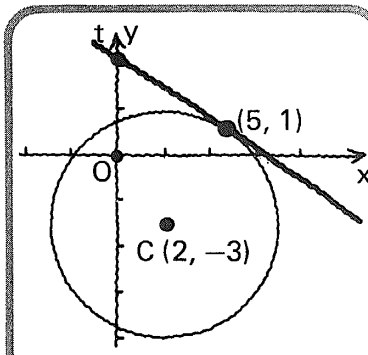
$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

Tangente en (5, 1):

$3x + 4y - 9 = 0$

Trazar la gráfica.





$$r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{16 + 36 + 48}}{2}$$

$r = 5$

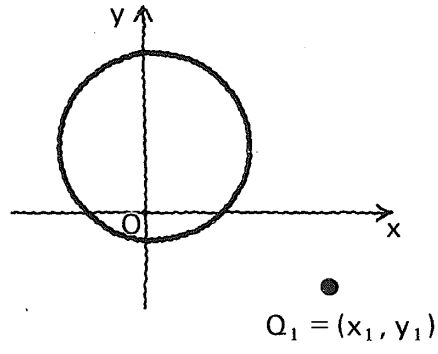
6.3.7.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

169

Consideremos,
ahora,
una circunferencia
y un punto
$Q_1 = (x_1, y_1)$
exterior a ella.

¿Cuántas tangentes a la
circunferencia es
posible trazar por
el punto Q_1?

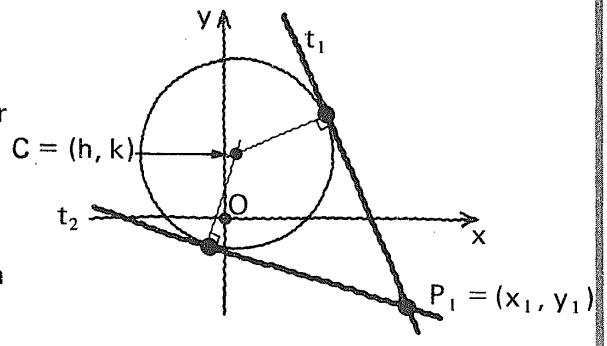


dos

(Véase cuadro siguiente)

170

Observemos con atención esta figura.



Podemos escribir una ecuación de las rectas que pasan por el punto P_1 con pendiente m así:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

[para t_1 podemos escribir:

$$y - y_1 = m_1(x - x_1)$$

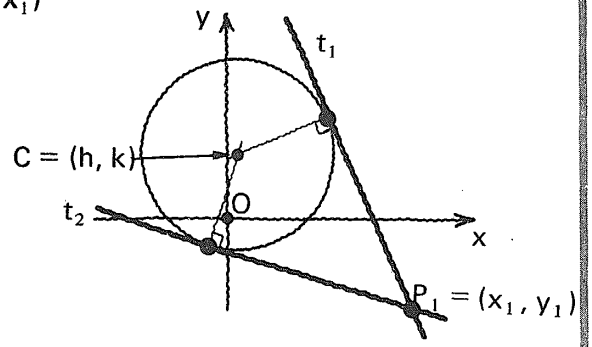
y para t_2:

$$y - y_1 = m_2(x - x_1)]$$

171

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

En la figura podemos ver que la distancia del centro de la circunferencia a cualquiera de las dos rectas debe ser igual a

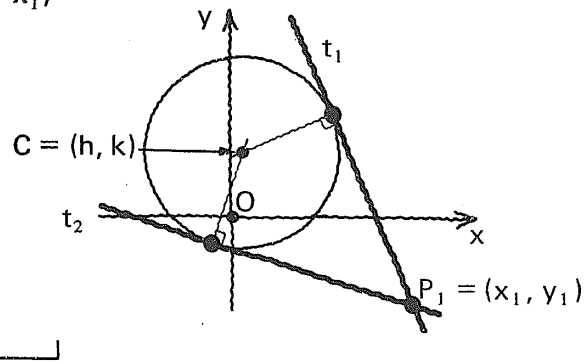


r

172

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Recordemos, además, que la distancia de un punto a una recta se expresa, de manera general, así:



Para el punto (x_1, y_1) y la recta $Ax + By + C = 0$

- $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

173

En nuestro caso,
el punto es
$C = (h, k)$.

Vamos a transformar
la ecuación

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

a la forma $Ax + By + C = 0$.

$y - y_1 = mx - mx_1$

$y - y_1 - mx + mx_1 = 0$

$-mx + y + mx_1 - y_1 = 0$

o

- $\underbrace{mx_1 - y_1 - mx_1 + y_1}_{A \quad B \quad C} = 0$

174

Entonces, la
distancia del punto
$C = (h, k)$
a la recta

$$mx - y - mx_1 + y_1 = 0$$

queda expresada así:

- $r = \dfrac{|mh - k - mx_1 + y_1|}{\sqrt{m^2 + 1}}$

puesto que:

$A = m$

y

$B = -1$

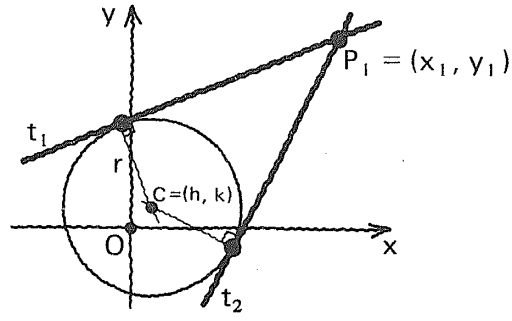
175

Las ecuaciones de las tangentes
a una circunferencia
de radio **r** y centro $C = (h, k)$
y que pasan
por el punto $P_1 = (x_1, y_1)$
pueden determinarse
resolviendo para **m** la ecuación

$$r = \frac{|\mathbf{mh - k - mx_1 + y_1}|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

y sustituyendo cada uno de los dos
valores obtenidos en

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$



176

Obtener ecuaciones para las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$ que pasan por el punto (8, 4).

177

Las ecuaciones tendrán la forma:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

en que **m** puede obtenerse de:

$$r = \frac{|mh - k - mx_1 + y_1|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

178

Sustituyendo datos en:

$$r = \frac{|mh - k - mx_1 + y_1|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$r =$ ____ $\quad x_1 =$ ____

$h =$ ____ $\quad y_1 =$ ____

$k =$ ____

resulta la siguiente ecuación para **m**:

____

De $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$

$$r = \frac{\sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 - 4(-6)}}{2}$$

$r = 4$

$$h = -\frac{-2}{2} = 1$$

$$k = -\frac{-6}{2} = 3$$

$x_1 = 8$

$y_1 = 4$

$$4 = \frac{|m - 3 - 8m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

o

$$4 = \frac{|1 - 7m|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

179

¡Atención!

$$4 = \frac{|1 - 7m|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

Resolvamos esta ecuación para **m**:

$$4\sqrt{m^2 + 1} = |1 - 7m|$$

Si $1 - 7m \geqslant 0$
$|1 - 7m| = 1 - 7m$
por sustitución obtenemos:

$4\sqrt{m^2 + 1} = 1 - 7m$

Si $1 - 7m < 0$
$|1 - 7m| = -(1 - 7m)$
$|1 - 7m| = 7m - 1$
por sustitución obtenemos:

$4\sqrt{m^2 + 1} = 7m - 1$

180

Completemos la solución

$4\sqrt{m^2 + 1} = 1 - 7m$

$4\sqrt{m^2 + 1} = 7m - 1$

- $16(m^2 + 1) = (1 - 7m)^2$

  $16\,m^2 + 16 = 1 - 14\,m + 49\,m^2$

  $33\,m^2 - 14\,m - 15 = 0$

  $m = \frac{14 \pm \sqrt{196 + 1\,980}}{66}$

  $m_1' \doteq 0.92$

  $m_1'' \doteq 0.49$

- $16(m^2 + 1) = (7m - 1)^2$

  $16\,m^2 + 16 = 49\,m^2 - 14\,m + 1$

  $m_2' \doteq 0.92$

  $m_2'' \doteq -0.49$

181

Las pendientes buscadas son:

$m_1 = 0.92$
$m_2 = -0.49$

por lo que las ecuaciones de las tangentes pueden escribirse así:

para

$m_1 \doteq 0.92$:

para

$m_2 \doteq -0.49$:

- $y - 4 = 0.92(x - 8)$

o

$0.92x - y - 3.36 = 0$

- $y - 4 = -0.49(x - 8)$

o

$0.49x + y - 7.92 = 0$

182

La circunferencia

$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$

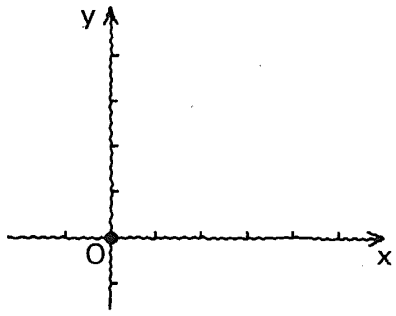
El punto exterior: (8, 4)

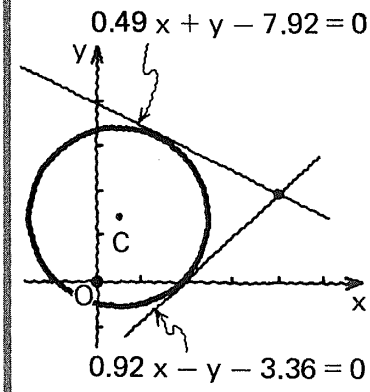
Las tangentes:

$t_1)$ $0.92x - y - 3.36 = 0$

$t_2)$ $0.49x + y - 7.92 = 0$

Trazar la gráfica.





183

Obtener una ecuación para cada una de las tangentes a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$$

que pasen por el punto $(-3, 6)$.

184

Las ecuaciones tendrán la forma:

└_____┘

en que m se obtiene de:

└_____┘

- $y - y_1 = m(x - x_1)$
- $r = \dfrac{|mh - k - mx_1 + y_1|}{\sqrt{m^2 + 1}}$

185

Sustituyamos datos en:

$$r = \frac{|mh - k - mx_1 + y_1|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$h =$ ⌊_____⌋ $\quad x_1 =$ ⌊_____⌋

$k =$ ⌊_____⌋ $\quad y_1 =$ ⌊_____⌋

$r =$ ⌊_____⌋

a fin de obtener una expresión para m:

⌊_____⌋

De $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$

- $h = -\frac{D}{2} = -\frac{-6}{2} = 3$
- $k = -\frac{E}{2} = -\frac{4}{2} = -2$
- $r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2} = \frac{\sqrt{36 + 16 + 92}}{2}$

  $r = 6$
- $x_1 = -3$
- $y_1 = 6$
- $6 = \frac{|3m + 2 + 3m + 6|}{\sqrt{m^2 + 1}}$

186

Resolvamos para **m**: $6 = \frac{|6m + 8|}{\sqrt{m^2 + 1}}$

$m_1 =$ ⌊_____⌋ $\quad m_2 =$ ⌊_____⌋

Respuesta en el cuadro siguiente

Estudiar con atención:

$$6\sqrt{m^2 + 1} = |6m + 8|$$

si $6m + 8 \geqslant 0$	si $6m + 8 < 0$
$\|6m + 8\| = 6m + 8$	$\|6m + 8\| = -(6m + 8)$
$6\sqrt{m^2 + 1} = 6m + 8$	$6\sqrt{m^2 + 1} = -(6m + 8)$
$36(m^2 + 1) = (6m + 8)^2$	$36(m^2 + 1) = [-(6m + 8)]^2$

$$36m^2 + 36 = 36m^2 + 96m + 64$$

$$96m = -28$$

$$m = -\frac{28}{96} \quad \begin{cases} m_1 = -\frac{7}{24} \\ m_2 = ? \end{cases}$$

187

Para $m_1 = -\frac{7}{24}$

obtenemos de

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 6 = -\frac{7}{24}(x + 3)$$

$$y - 6 = -\frac{7x}{24} - \frac{7}{8}$$

$$\frac{7x}{24} + y - 6 + \frac{7}{8} = 0$$

$$\frac{7x}{24} + y - \frac{41}{8} = 0$$

● $7x + 24y - 123 = 0$

188

Circunferencia:

$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$

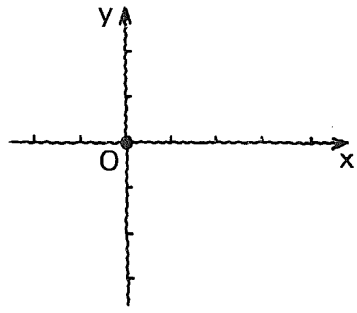
Punto exterior:

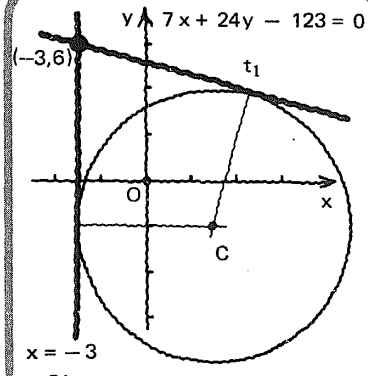
$(-3, 6)$

Tangente t_1:

$7x + 24y - 123 = 0$

Veamos esto gráficamente:





Observamos que una ecuación de la tangente t_2 es $x = -3$ recta para la cual la pendiente no está definida (m_2 no está definida).

6.3.7.2

Práctica adicional,
si se considera necesario.

6.3.7

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* una ecuación de la tangente a una circunferencia, en un punto dado perteneciente a ella;
- *obtener* una ecuación para cada una de las tangentes a una circunferencia, que pasan por un punto dado exterior a ella.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 15 de agosto de 1984,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO MIA KC 100

Bloque 6:

Geometría analítica

En los ocho *módulos de color morado* que forman el bloque 6, *Geometría analítica*, se amplían y formalizan los conceptos de relación, función y gráfica cartesiana. En el *módulo 1* se incluyen algunos conceptos y procedimientos elementales, tales como:

- Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano
- División de un segmento rectilíneo según una razón dada
- Ángulo formado por dos rectas concurrentes
- Pendiente y ángulo de inclinación de una recta

Después, se conduce *paso a paso* al lector hacia la revisión de los lugares geométricos más comunes. Así, en el *módulo 2* se analiza la recta; en el *módulo 3*, la circunferencia; en el *módulo 4*, la elipse; en el *módulo 5*, la hipérbola, y en el *módulo 6*, la parábola.

Luego, con el estudio de las cónicas y la ecuación general de segundo grado, el cual se realiza en el *módulo 7*, se accede a la integración de un gran marco conceptual.

Dicho marco conceptual se amplía aún más en el *módulo 8*, donde se brindan los elementos necesarios para llevar a cabo el análisis de cualquier lugar geométrico del plano cartesiano.

Por último, las fórmulas y los conceptos fundamentales de todos los temas comprendidos en los módulos que integran este bloque, aparecen en el módulo de resumen llamado *Memo 6. Geometría analítica.*

Bloque	Módulo	Módulo de resumen
1 **ÁLGEBRA** ESTRUCTURAS Y OPERACIONES **Libros color café**	*1- Conjuntos* *2- Estructuras matemáticas* *3- El conjunto de los enteros* *4- Operaciones con enteros* *5- Lenguaje algebraico 1. Formación* *6- Lenguaje algebraico 2. Transformación* *7- Operaciones con polinomios 1. Suma, resta, multiplicación y división* *8- Operaciones con polinomios 2. Productos notables* *9- Operaciones con polinomios 3. Factorización* *10- El conjunto de los racionales* *11- Operaciones con expresiones racionales* *12- El conjunto de los reales* *13- Operaciones con expresiones reales* *14- El conjunto de los complejos. Estructura y operaciones*	***MEMO 1*** *ÁLGEBRA. ESTRUCTURAS Y OPERACIONES*
2 **ÁLGEBRA** MODELOS **Libros color verde**	*1- La ecuación como modelo matemático* *2- Ecuaciones de primer grado* *3- Sistemas de ecuaciones de primer grado* *4- Desigualdades de primer grado* *5- Ecuaciones de segundo grado* *6- Desigualdades de segundo grado* *7- La relación como modelo matemático* *8- Funciones* *9- Funciones exponenciales* *10- Funciones logaritmicas* *11- Ecuaciones, desigualdades y sistemas. Soluciones gráficas* *12- Resolución de problemas*	***MEMO 2*** *ÁLGEBRA. MODELOS*
NOCIONES DE LÓGICA MATEMÁTICA **3** **Libros color azul**	*1- Lógica proposicional 1. Proposiciones* *2- Lógica proposicional 2. Argumentos*	***MEMO 3*** *NOCIONES DE LÓGICA MATEMÁTICA*
4 **GEOMETRÍA EUCLIDIANA** **Libros color rojo**	*1- Conjuntos de puntos* *2- Relaciones binarias* *3- Figuras planas* *4- El aparato demostrativo. Ángulos y triángulos* *5- Polígonos convexos* *6- Relación de semejanza* *7- Geometría métrica en el plano* *8- Cuerpos geométricos*	***MEMO 4*** *GEOMETRÍA EUCLIDIANA*
5 **TRIGONOMETRÍA** **Libros color ocre**	*1- Las razones trigonométricas de un ángulo agudo* *2- Resolución de triángulos rectángulos* *3- El círculo trigonométrico* *4- Las funciones trigonométricas* *5- Las funciones trigonométricas inversas* *6- Identidades trigonométricas* *7- Resolución de triángulos cualesquiera* *8- Ecuaciones trigonométricas*	***MEMO 5*** *TRIGONOMETRÍA*
6 **GEOMETRÍA ANALÍTICA** **Libros color morado**	*1- Introducción a la geometría analítica* *2- La recta* ***3- La circunferencia*** *4- La elipse* *5- La hipérbola* *6- La parábola* *7- Las cónicas y la ecuación general de segundo grado* *8- Relaciones y lugares geométricos*	***MEMO 6*** *GEOMETRÍA ANALÍTICA*
7 **CÁLCULO DIFERENCIAL** **Libros color azul turquesa**	*1- Introducción al cálculo diferencial* *2- Límite de una función* *3- Continuidad de una función* *4- Derivación de funciones algebraicas* *5- Derivación de funciones trascendentes* *6- Extremos de una función (máximos y mínimos)*	***MEMO 7*** *CÁLCULO DIFERENCIAL*
8 **CÁLCULO INTEGRAL** **Libros color negro**	*1- Sumatoria y notación sigma* *2- La integral definida y la integral indefinida* *3- Integrales elementales* *4- Métodos de integración 1* *5- Métodos de integración 2* *6- Algunas aplicaciones del cálculo integral*	***MEMO 8*** *CÁLCULO INTEGRAL*

ISBN 968-24-0834-2